LEZIONE 8

Introduzione al concetto di probabilità matematica. Perché è importante introdurre l'alunno nel mondo della casualità?

La casualità: un fenomeno sempre presente nella vita di ognuno di noi oggi e nel passato

Uno sguardo storico

Fino al secolo XX il calcolo delle probabilità è quasi sempre stato associato al gioco d'azzardo, nato quindi nel mondo del vizio, perciò snobbato da gran parte dei matematici.

Ma già a partire dal secolo XVI, alcuni studiosi sono stati attratti da questa branca nascente della matematica.

Uno dei primi fu **Girolamo Cardano (**1501-1576), bolognese, incallito giocatore d'azzardo e ottimo matematico.

Scrisse la sua opera fondamentale negli anni 1560, il ***Liber de ludo aleae***, che però fu pubblicato solo nel 1663 a Parigi.

Uno sguardo storico

Pascal e Fermat conobbero il Cavaliere de Méré in un salotto parigino. Costui, uomo di lettere ma soprattutto giocatore d'azzardo, aveva in serbo domande concernenti le probabilità di vincere a un gioco, quesiti che pose ai due suoi amici.

Inconsciamente, il Cavaliere diede inizio ai primi studi importanti sulla probabilità (un secolo dopo Cardano!).

Da allora, questa «nuova» disciplina conobbe uno sviluppo decisivo, ma dovette attendere fino al secolo XX per avere il riconoscimento ufficiale della Matematica.

Blaise Pascal
(1623 - 1662)

Pierre de Fermat
(1601 - 1665)

Finalmente, la consacrazione

Andrej Nikolaevič **Kolmogorov** (1903–1987), matematico sovietico, presenta gli assiomi del calcolo delle probabilità (1933).

Eccoli nella forma adatta alla probabilità che si può proporre a scuola:

- A ogni evento casuale E viene associato un numero reale p(E), tale che $0 \leq p(E) \leq 1$, detto probabilità di E.

- Se $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sono eventi a due a due disgiunti, allora:

$$p(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = p(E_1) + p(E_2) + \ldots + p(E_n)$$

Che cosa può fare la scuola?

Sicuramente ripensare ai contenuti solitamente presenti nei curricoli scolastici.

Non è normale che ci siano ancora giovani che devono occuparsi di eventi casuali solo alle superiori, quindi privi di quell'importante attività preparatoria necessaria per capire la formalizzazione del calcolo delle probabilità.

Chi pensa che non sia possibile trattare la casualità a matematica né alla primaria né alla secondaria, sbaglia. Basta provare per vedere come l'interesse per la casualità sia molto vivo nei giovani.

Certamente non si tratta di tessere teorie, ma di mettere gli alunni di fronte a situazioni casuali e nella necessità di darne un'interpretazione corretta.

Esempi di attività probabilistiche per la scuola primaria

Lancio di un dado

Una semplice previsione

Possiamo dire a un bimbo
che se azzecca la previsione
ha diritto a un premio.

Il gioco consiste nel lanciare un dado.

Ai bimbi si chiede di scegliere fra uno dei seguenti eventi:

- uscirà un numero pari
- uscirà un multiplo di 3
- uscirà un divisore di 6

Fatta la scommessa, si lancia il dado e si contano i bimbi che hanno azzeccato la previsione.

Si ripete il gioco alcune volte.

Lancio di un dado: soluzione

Dopo il gioco, si avvia una prima riflessione:

Numero pari:

- sul dado sono il 2, il 4 e il 6, cioè:
  3 risultati sui 6 possibili → 3 su 6 → **3/6** o **3:6=0,5**
  è la probabilità che si verifichi l'uscita di un numero pari

Multiplo di 3:

- sono il 3 e il 6 → 2 su 6 → 2/6 o 2 : 6 = 0,33…

Divisore di 6:

- sono 1, 2, 3 e 6 → 4 su 6 → 4/6 o 4 : 6 = 0,66…

Ogni risultato (evento) ha la sua probabilità che è un numero tra 0 e 1. In questo caso ha più probabilità di vincere chi scommette sul «divisore di 6».

Lancio di un dado: interpretiamo la probabilità

Dobbiamo riflettere sul significato della frase:
ha più probabilità di vincere chi scommette sul «divisore di 6»

Vuol dire che chi scommette così vincerà **di sicuro**?

No, e infatti, ripetendo alcune volte il gioco, si vede che può verificarsi qualsiasi dei tre eventi. Nessuno è sicuro.

Pensiamo a una nuova scommessa da fare, in modo che sia sicura.

Per esempio, è sicuro che esca un numero di una cifra, che esca un numero da 1 a 6.

In questi casi la previsione è di 6 su 6 → 6/6 o 6:6=1

Bene, un evento è **sicuro** (cioè si verificherà sicuramente) se ha probabilità **1**.

Lancio di un dado

Quale evento avrebbe probabilità 0?

0/6 o 0:6 = 0 quindi occorre scommettere su un numero che non sia 1, 2, 3, 4, 5, 6. Per esempio, 7, ma anche 10, 100, 2021, ecc.

Questa riflessione ci conferma quanto già detto, cioè che la probabilità di un evento casuale è un numero tra 0 e 1, estremi compresi.

Zero è la probabilità di un evento che non può realizzarsi, cioè un evento **impossibile**.

Sicuro, possibile, impossibile

La parola incompleta

Un cartello portava scritto una parola di otto lettere.
Le lettere dalla seconda alla quinta sono state cancellate.

V					N	I	A

Associa a ciascuna delle seguenti affermazioni gli aggettivi: **impossibile** (p=0), **possibile** (0<p<1, **sicuro** (p=1).

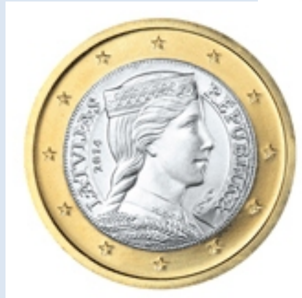
La parola è VERBANIA ..possibile..............................

La parola è VANIA ..impossibile..............................

La parola è VALLECANIA ..impossibile..............................

È più probabile che la parola sia VERBANIA o VIRGINIA?

Lancio di due monete



Quando si lancia una moneta, possono verificarsi due risultati:

- esce testa (T)
- esce croce (C)

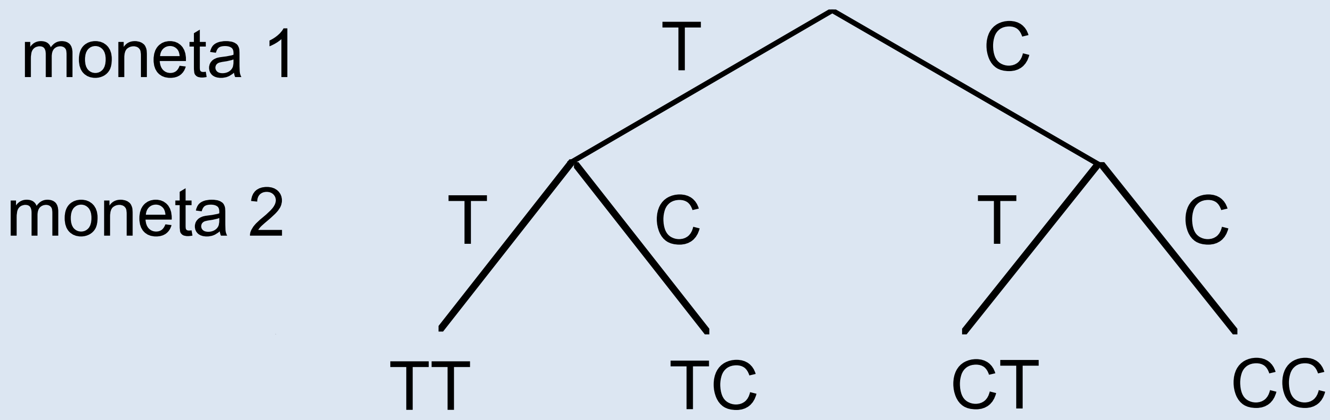
Se lanciamo due monete, possono verificarsi questi 3 eventi:

- due teste
- due croci
- una testa e una croce

Su quale dei tre eventi scommetteresti? Perché?

Lancio di due monete: soluzione

Può essere utile rappresentare la situazione con un albero.



L'albero ci permette di scrivere:

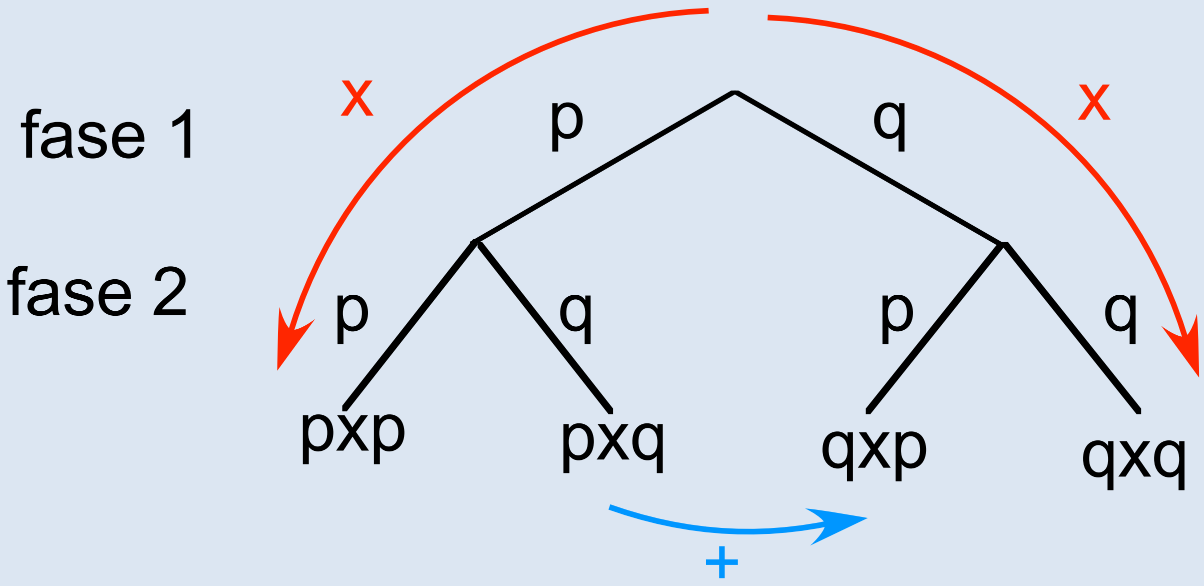
Probabilità di due teste = 1/4 = 0,25

Probabilità una testa e una croce = 2/4 = 0,5

Probabilità di due croci = 1/4 = 0,25

La probabilità «una testa e una croce» è **doppia** delle altre!

L’albero probabilistico: generalizzazione



- Lungo i rami le probabilità si moltiplicano («e» logica)
- Le probabilità di eventi disgiunti si sommano («o» logica)

Lancio di due dadi

I risultati possibili sono coppie di numeri interi compresi tra 1 a 6. Si possono ottenere meglio con una tabella:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Se ci interessa la somma dei punti ottenuti in ogni lancio, al posto delle coppie inseriamo le somme.

Lancio di due dadi: riassunto

Risultati possibili:

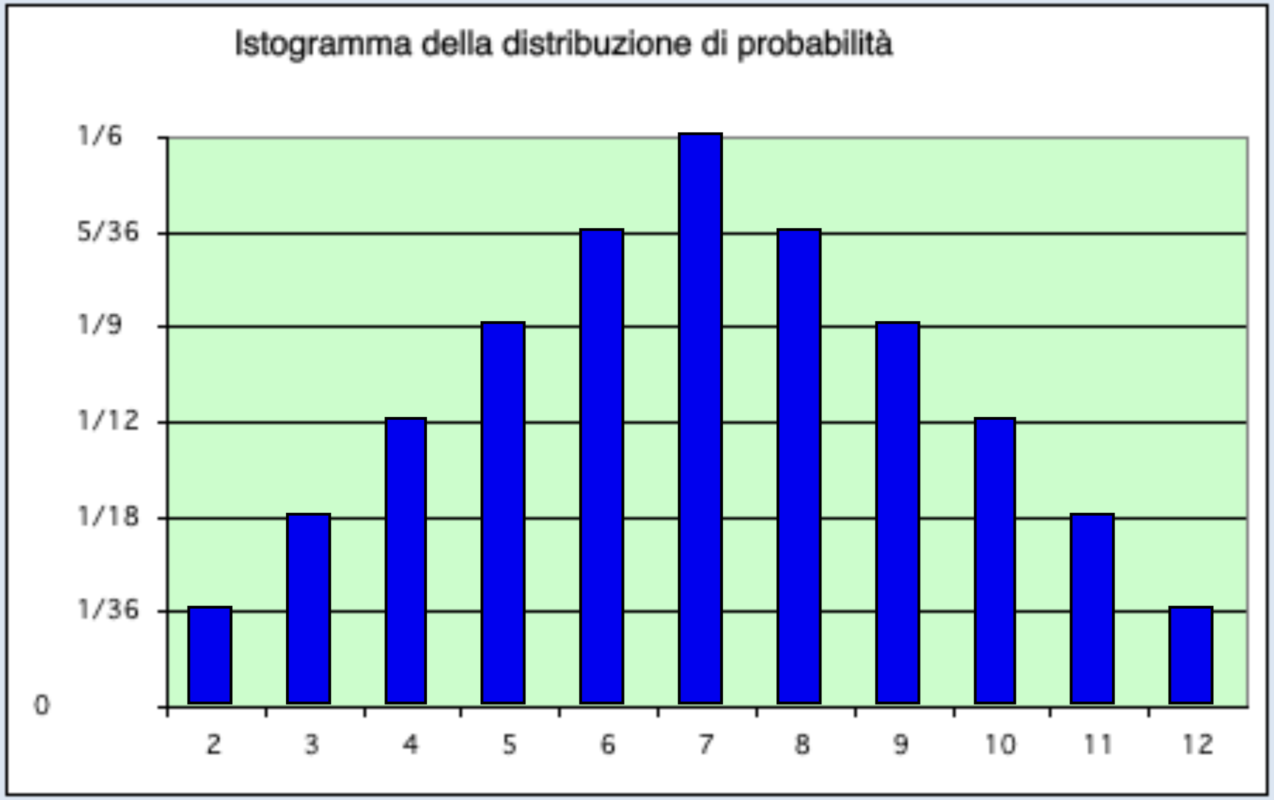
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Probabilità associate:

1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Somma delle probabilità: $$2 \cdot \left(\frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} \right) + \frac{6}{36} = 1$$

La successione delle probabilità associate si dice anche **distribuzione di probabilità**.

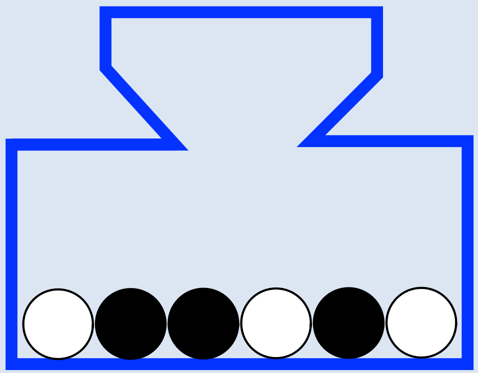


Problemini divertenti

Abdul
condannato a morte
(da un racconto arabo medievale)

… di Albert Szent-György (1893-1936), ungherese

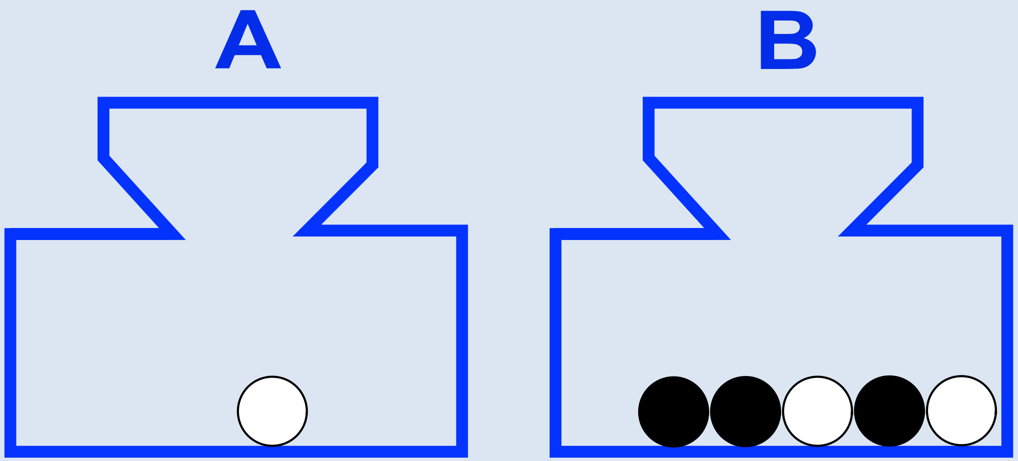
Si racconta che Abdul è accusato di essere implicato nel mercato delle schiave. La giuria, composta di 6 uomini e 6 donne, ha pronunciato un verdetto di parità…
Il Sultano non sa come fare, consulta i saggi, i quali, dopo aver discusso a lungo, decidono di ricorrere all'estrazione da un'urna contenente 3 biglie bianche e 3 nere. Abdul avrebbe avuto salva la vita se dall'urna avesse estratto una biglia bianca.



$$\mathrm{P(SALVARSI)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

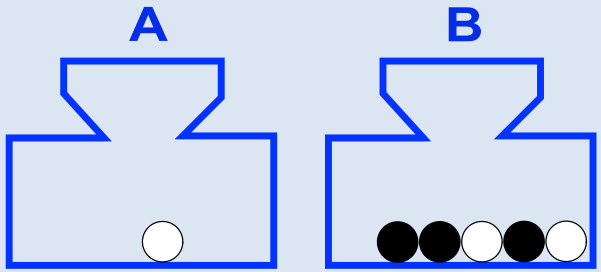
La mossa di Abdul

Abdul, uomo dal vivace intelletto, chiede come ultimo desiderio di potere ridistribuire le 6 biglie in due urne. Il Sultano, molto rigoroso nell'applicare la legge, non sa come fare. Consulta di nuovo i saggi. Dopo un'intera notte di discussioni, i saggi giungono alla conclusione che il desiderio può essere accettato, perché le biglie sono pur sempre 3 bianche e 3 nere.
Ecco come Abdul dispone le biglie nelle due urne:



Avrà aumentato la probabilità di salvarsi?

La mossa di Abdul

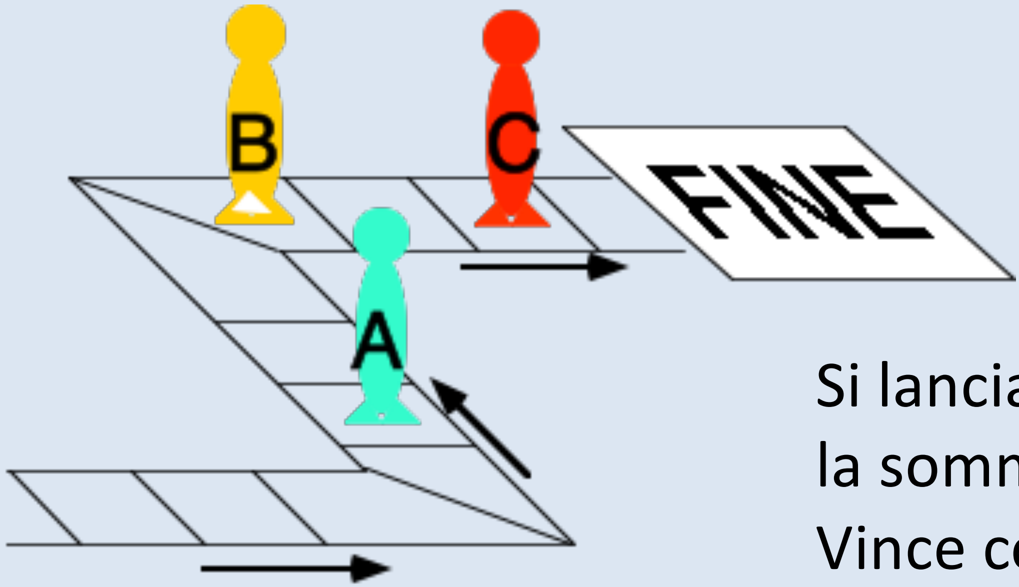


$$P(\text{SALVARSI}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{5}{10} + \frac{2}{10} = \frac{7}{10} > \frac{1}{2}$$

Il testo non dice se Abdul si sia salvato…

Il gioco dell'oca

Gioco dell’oca - un finale carico di tensione

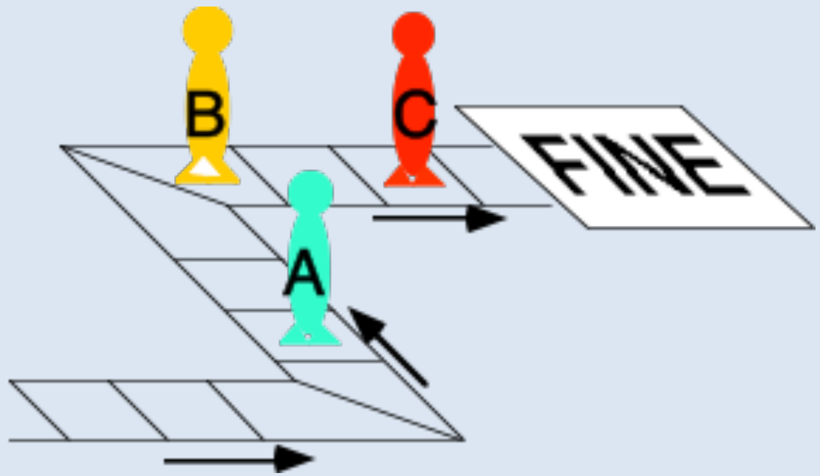


Si lanciano due dadi e si considera la somma dei punti.
Vince colui che per primo arriva esattamente sulla casella FINE.

Supponiamo che debbano giocare C, poi B, poi A, nell'ordine.

Che probabilità ha ciascun giocatore di vincere al primo colpo?

Gioco dell'oca - soluzione



gioca C

$\frac{1}{36}$ (1,1) vince in un solo colpo

$\frac{35}{36}$ qualsiasi altro risultato

gioca B

$\frac{3}{36}$ ottiene 4, vince in un solo colpo

$\frac{33}{36}$ qualsiasi altro risultato

4= 2+2=1+3=3+1

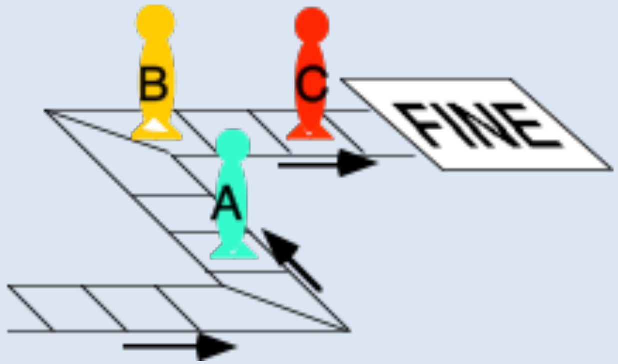
gioca A

$\frac{6}{36}$ ottiene 7, vince in un solo colpo

$\frac{30}{36}$ qualsiasi altro risultato

7= 1+6=6+1=2+5=
=5+2=3+4=4+3

Gioco dell'oca - probabilità

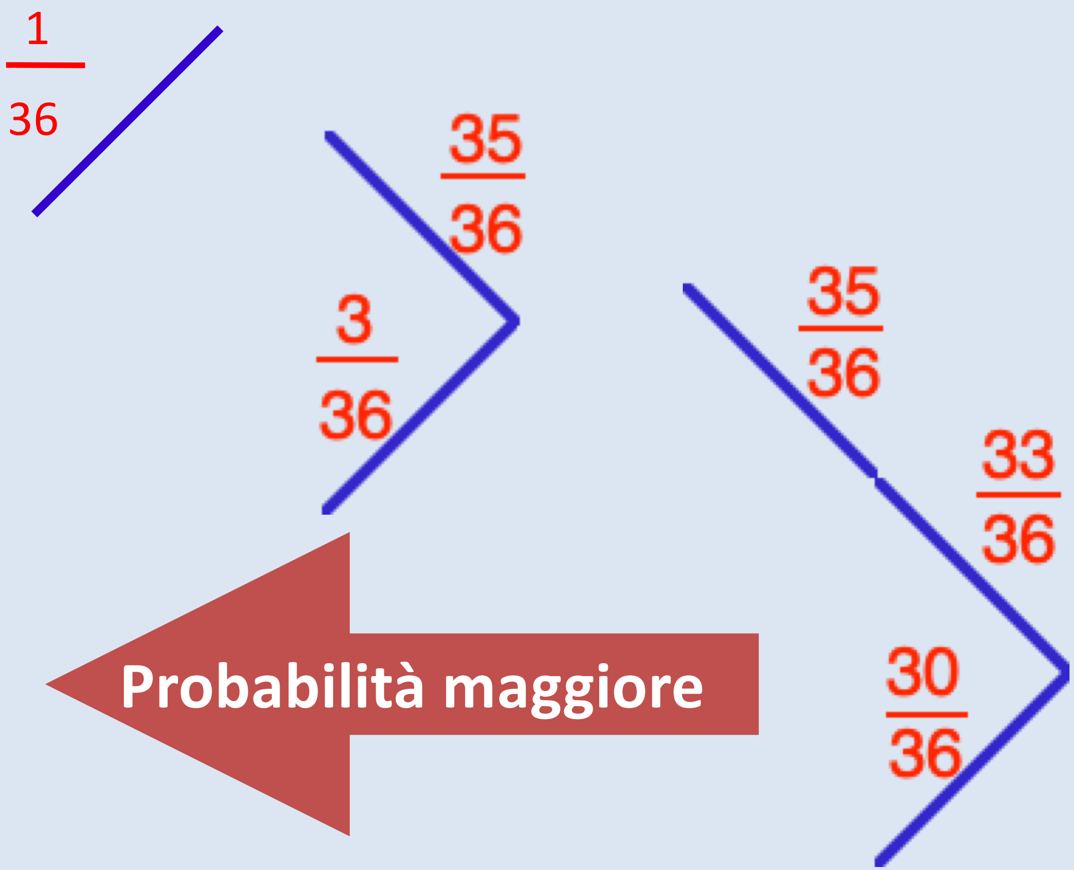


Calcoliamo la probabilità che ciascun giocatore ha di vincere al primo colpo:

$$P(C) = \frac{1}{36} \cong 0.027$$

$$P(B) = \frac{35}{36} \cdot \frac{3}{36} \cong 0.081$$

$$P(A) = \frac{35}{36} \cdot \frac{33}{36} \cdot \frac{6}{36} \cong 0.149$$



Probabilità maggiore

Un professore originale

Il gioco è onesto?

Il professor Imbroglia un giorno disse al suo collega Della Rima, insegnante di lettere:
«Noi due portiamo lo stesso numero di scarpe»
Gli mostrò un sacco di plastica nera e continuò:
«Qui dentro ci sono due paia di scarpe, perfettamente uguali.
Domani è il tuo compleanno. Se vuoi che te le regali, devi guadagnartele.
Chiederemo alla prima persona che vediamo di estrarre a caso due scarpe, una dopo l'altra.
Se sono due destre o due sinistre ti regalo le due paia, altrimenti me le tengo io».

È onesto il gioco proposto dal professor Imbroglia?

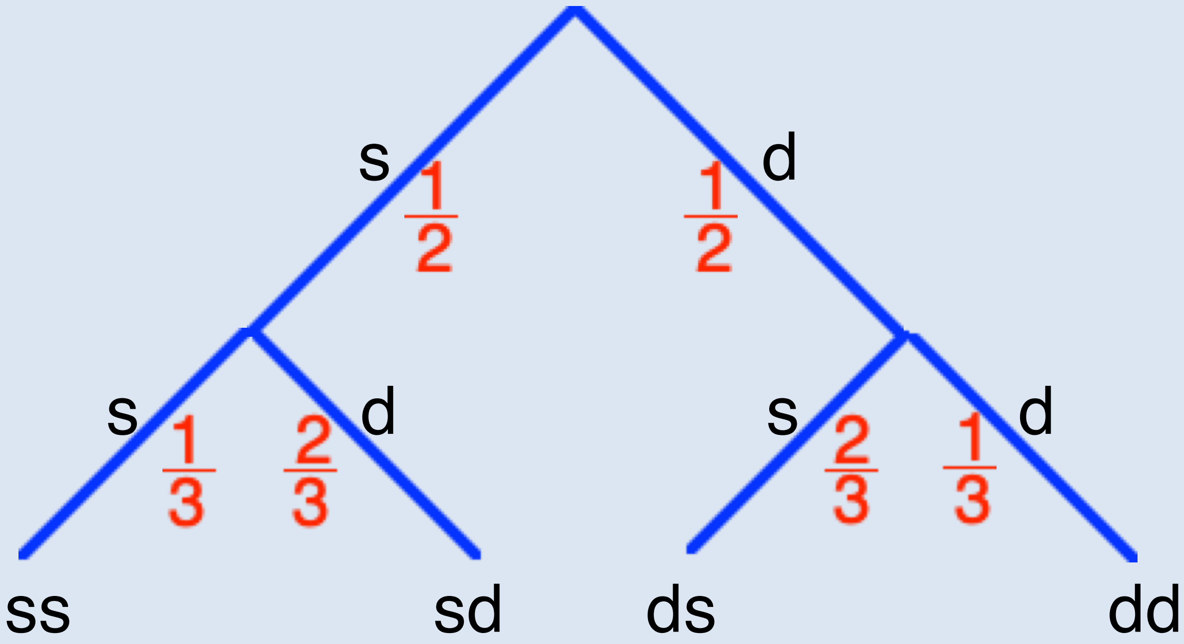
(Un tale gioco è onesto se ciascuno dei due ha la stessa probabilità di vincere).

Un professore originale - soluzione

prima estrazione:

seconda estrazione:

risultati possibili:



Pr(vince Imbroglia) = Pr(sd o ds) = $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\boxed{\frac{2}{3}}$

Pr(vince Della Rima) = Pr(ss o dd) = $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\boxed{\frac{1}{3}}=1-\frac{2}{3}$

Il gioco non è onesto.

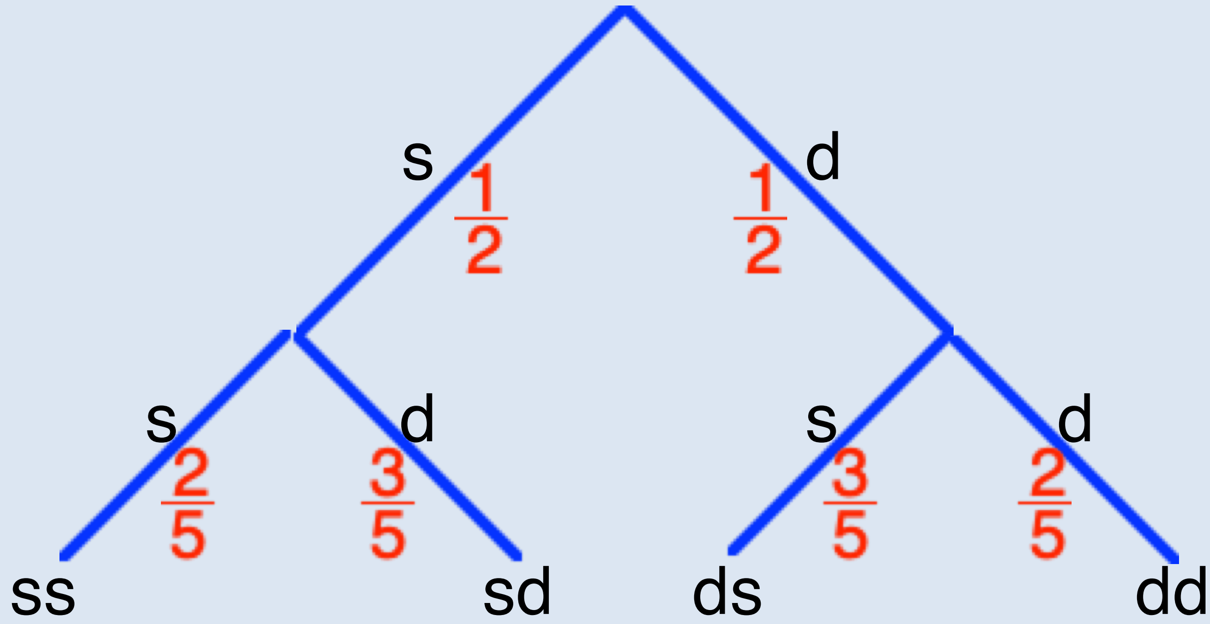
Rilancio

Che cosa succederebbe se nel sacco Imbroglia mettesse tre paia di scarpe uguali?

prima estrazione:

seconda estrazione:

risultati possibili:



Pr(vince Imbroglia) = Pr(sd o ds) = $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=\boxed{\frac{3}{5}}$

Pr(vince Della Rima) = Pr(ss o dd) = $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=\boxed{\frac{2}{5}}=1-\frac{3}{5}$

Il gioco è ancora disonesto, ma la situazione di Della Rima migliora leggermente…

Generalizzazione (per insegnanti)

E se il numero delle paia di scarpe fosse n?

Pr(vince Imbroglia) = $$\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2n-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2n-1}=\frac{n}{2n-1}$$

Pr(vince Della Rima) = $$\frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{2n-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{2n-1}=\frac{n-1}{2n-1}$$

Quando n diventa molto grande, le due frazioni si avvicinano al valore limite 1/2…

$$\frac{n}{2n-1}\xrightarrow{\text{n infinito}}\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$$

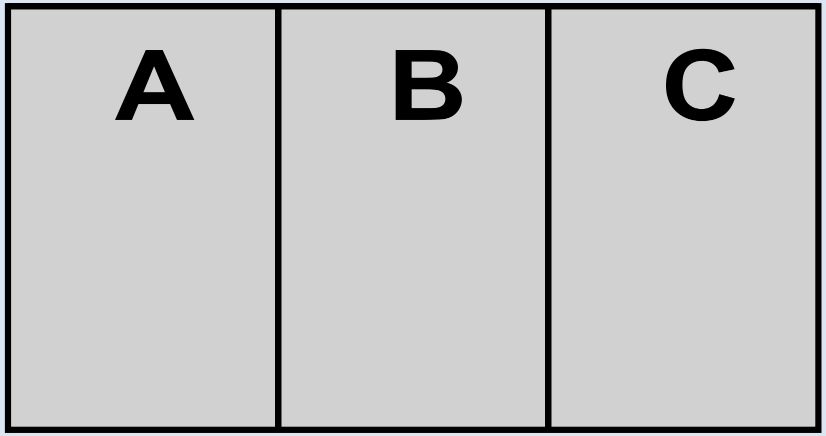
$$\frac{n-1}{2n-1}\xrightarrow{\text{n infinito}}\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$$

Con infinite paia di scarpe, il gioco diventa onesto!

Monty Hall (USA, 1990)

Gioco proposto in TV nel programma
«Let’s make a deal» dal presentatore Monty Hall (1990)

Ci sono 3 box: in uno c’è un’auto di lusso, negli altri una capra.



Ovviamente il concorrente non sa dove si trova l’auto.

Il presentatore invita il concorrente a scegliere un box. Se sceglie quello giusto, l’auto è sua. Ma il presentatore non apre subito la porta indicata e propone al concorrente di cambiare la sua scelta. Se accetta di cambiare, il presentatore apre una porta che cela una capra e invita il concorrente ad aprire la porta rimasta chiusa.

Conviene accettare la proposta del presentatore?

Una possibile soluzione

Se il giocatore rimane sulla sua scelta, la probabilità di vincere l'auto di lusso è 1/3 (1 possibilità su 3).
Se invece accetta la proposta del presentatore, il calcolo della probabilità si fa un tantino difficile. Gli spettatori del programma televisivo (e loro amici…) litigarono per tre mesi…
Ecco la nostra soluzione.

Prima scelta: auto 1/3 capra 2/3

rifiuta l'auto rifiuta una capra

Cambia la scelta: 1 1

trova la capra **TROVA L'AUTO**

$$P(\text{vincere l'auto}) = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$$ (il doppio!)

Appendice

Che cosa sono e che senso hanno i *play off*?

LA SITUAZIONE

Le prime squadre classificate alla fine di un campionato accedono ai *play off*, un torneo a eliminazione caratterizzato dal fatto che due squadre disputano tra loro **più partite**.

Ci si può chiedere:

- perché **più partite**?

- con questo sistema si favoriscono le squadre più forti o le altre?

Ogni sportivo ha la propria risposta, ma la matematica che cosa ne dice?

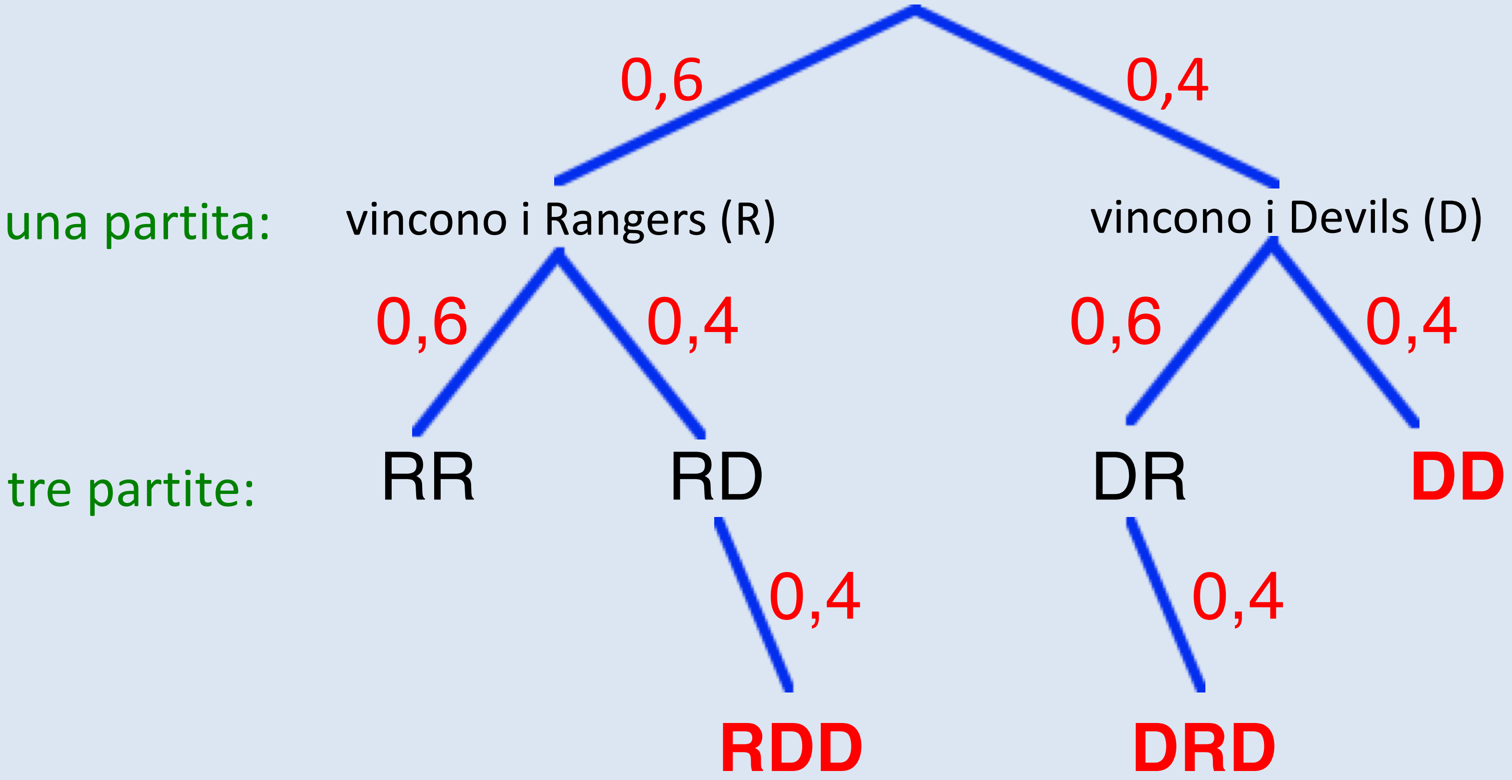
SIMULAZIONE

I Rangers e i Devils sono giunti alla finale dei play off.

Le statistiche indicano che in una sola partita la probabilità di vittoria dei Rangers è 0,6.

Qual è la probabilità che la squadra ritenuta più debole (i Devils) vinca la sfida con i Rangers se giocassero 3, 5, 7 partite di fila?

Calcolo nel caso di 2 partite su 3

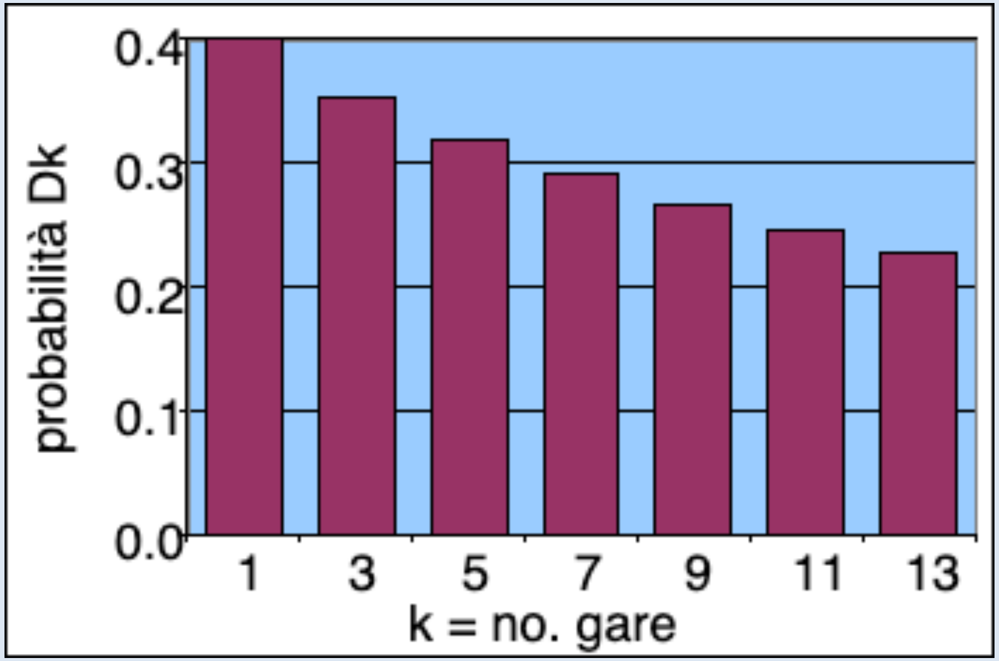


$Pr(D_3) = 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,4$ **= 0,352**

Con 3 partite, la probabilità che vinca la più debole **diminuisce**.

Alcuni risultati

No. partite	Probabilità di vittoria della squadra meno forte	0.4
1		0.400000000
3		0.352000000
5		0.317440000
7		0.289792000
9		0.266567680
11		0.246501868
13		0.228843953



Più partite si disputano
più la probabilità
che vinca la squadra
meno forte **diminuisce**.

Fine della lezione 8

Fine del webinar

GRAZIE!!!

Indirizzi utili

gianar76@gmail.com

www.smasi.ch

https://rsddm.dm.unibo.it

Per consultazione saggi
e ordinazione fascicoli Sapyent

https://bit.ly/inostriamicinumeri