LEZIONE 7

Educazione al pensiero combinatorio
Perché introdurre l'alunno della primaria nel mondo della combinatoria e in che modo?

Quali sono? Quanti sono?

Uno sguardo storico e pluridisciplinare

Nella letteratura si legge che l'arte combinatoria si perde nei secoli. Dall'India ci sono pervenuti, per esempio, i quadrati magici (primi secoli d.C.).

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

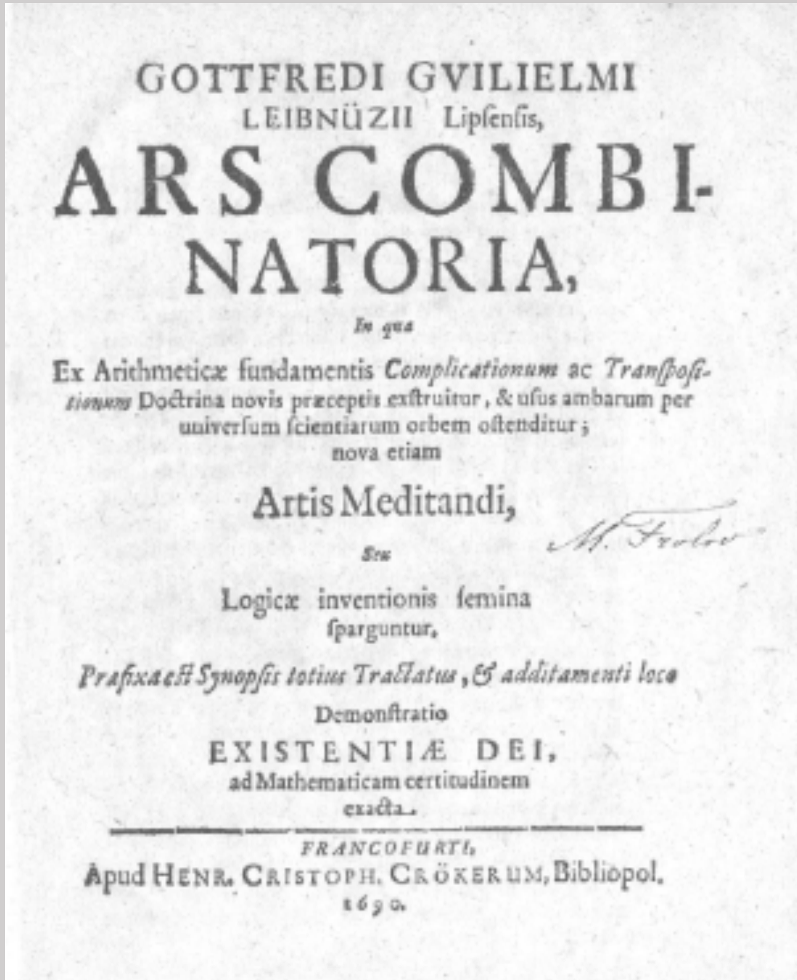
Dal Medioevo si fa risalire il cosiddetto Triangolo di Tartaglia (XIV secolo), poi ripreso un paio di secoli dopo da Blaise Pascal e Leonhard Euler che lo generalizzarono e usarono per esprimere i coefficienti dello sviluppo della potenza n-esima di un binomio.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
....

Un personaggio chiave: Gottfried Wilhelm Leibniz (XVII secolo)

Fu lui a introdurre per la prima volta il termine «combinatoria», pubblicando nel 1690 la famosa opera «Ars combinatoria».

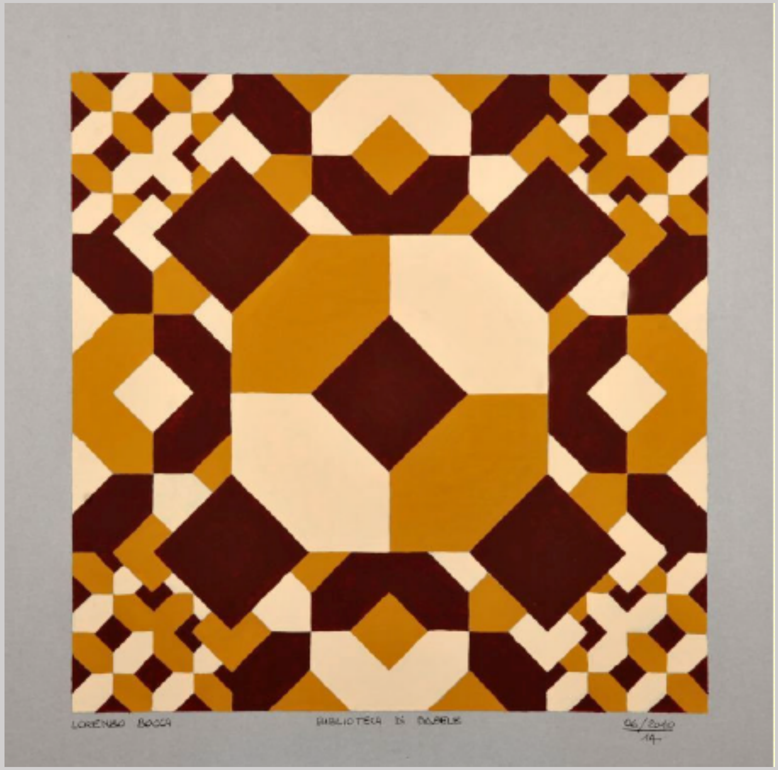
Dallo Zingarelli:
arte combinatoria, tecnica studiata da Leibniz (1646-1716)
per derivare concetti complessi dalla combinazione di altri semplici, considerati come primitivi (...)

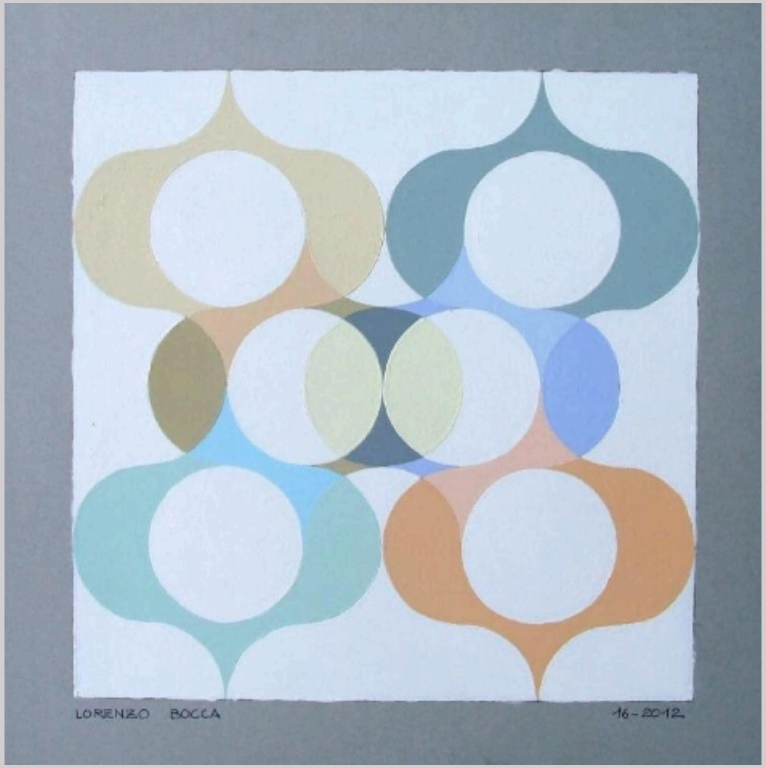


GOTTFREDI GVILIELMI
LEIBNÜZII Lipsensis,
ARS COMBI-
NATORIA,
In qua
Ex Arithmeticæ fundamentis *Complicationum* ac *Transpositionum* Doctrina novis præceptis exstruitur, & usus ambarum per universum scientiarum orbem ostenditur; nova etiam
Artis Meditandi,
Seu
Logicæ inventionis semina sparguntur,
Præfixa est Synopsis totius Tractatus, & additamenti loco
Demonstratio
EXISTENTIÆ DEI,
ad Mathematicam certitudinem exacta.

FRANCOFURTI,
Apud HENR. CRISTOPH. CRÖKERUM, Bibliopol.
1690.

Combinatoria e arte figurativa
mini galleria di Lorenzo Bocca, Cremona

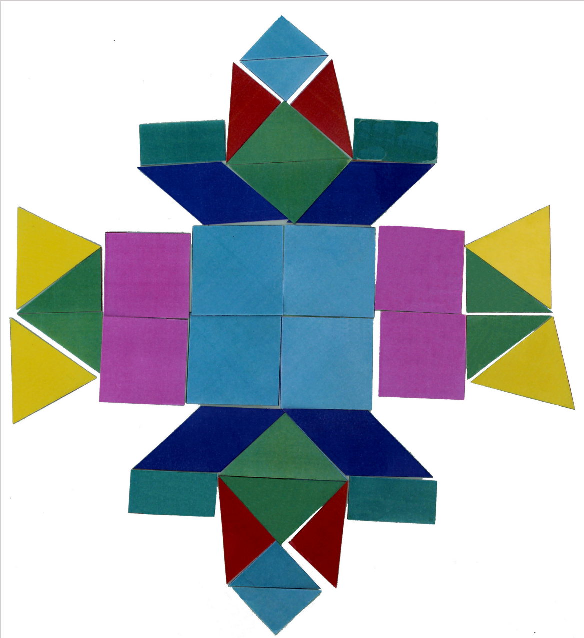


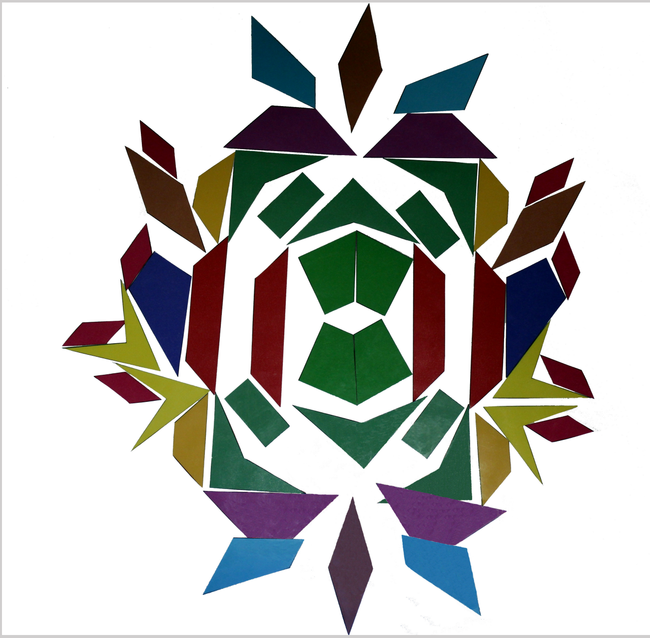


Lorenzo Bocca, Cremona

Composizioni simmetriche

eseguite da alunni delle prime classi della scuola elementare
Pomeriggi di animazione matematica, SMASI





Letteratura combinatoria

Raymond Queneau
Cent mille milliards de poèmes (1961)
1960, Parigi, gruppo dell'*Oulipo*

$$\underbrace{10\cdot10\cdot10\cdot\ldots\cdot10}_{14\text{ fattori}}=$$

$$=10^{14}=$$

$$=100'000'000'000'000$$

$$=100\text{ bilioni}=100\text{ tera (T)}$$

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10
v01										
v02										
v03										
v04										
v05										
v06										
v07										
v08										
v09										
v10										
v11										
v12										
v13										
v14										

La situazione scolastica

Incubi di molti studenti liceali

$$\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=\binom{n}{k}$$

$$\frac{(n+r-1)!}{n!\cdot(r-1)!}$$

$$n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\quad\cdot3\cdot2\cdot1$$

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$$

Qualcosa non funziona: che cosa?

Aritmetica e geometria: si inizia **subito**, a partire dalla scuola dell'infanzia con giochi, alla primaria con situazioni stimolati e prime formalizzazioni, dalle medie in su, gradatamente, con le generalizzazioni.

Combinatoria:
niente* alla scuola dell'infanzia
niente* alla primaria
niente (o quasi) alle medie
subito formalizzazione e generalizzazione.

E la formazione degli insegnanti?

Aritmetica e geometria: discipline normalmente conosciute correttamente, almeno per quanto concerne la matematica scolastica.

Combinatoria:
Generalmente non conosciuta o, peggio, oggetto di reminiscenze poco simpatiche risalenti a loro esperienze nelle superiori; di conseguenza insegnanti poco inclini a proporre in classe situazioni combinatorie.

Eppure si può…
giocare con i bambini in
modo combinatorio.

È un contributo importante
alla loro formazione e all’immagine
della matematica
che vanno costruendosi.

Non calcolo combinatorio, ma formazione del pensiero combinatorio.

Come può contribuire la scuola primaria?

In ultima analisi i problemi combinatori concernono situazioni che propongono insiemi di oggetti matematicamente determinati, rispetto ai quali si vuole rispondere a due domande basilari:

Quali sono gli oggetti? Quanti sono?

Si inizia con la domanda «quali sono?» alla quale si può rispondere con sicurezza solo se il numero di oggetti richiesto non è troppo grande.

Altrimenti ci si deve limitare a calcolare il numero di questi oggetti ed eventualmente a rappresentarne solo alcuni.

I problemi combinatori si prestano alla formulazione di congetture, eventualmente trasformabili in teoremi che possono assumere due forme principali: esprimere $f(n)$ conoscendo $f(n-1)$ oppure esprimere $f(n)$ usando solo la variabile n.

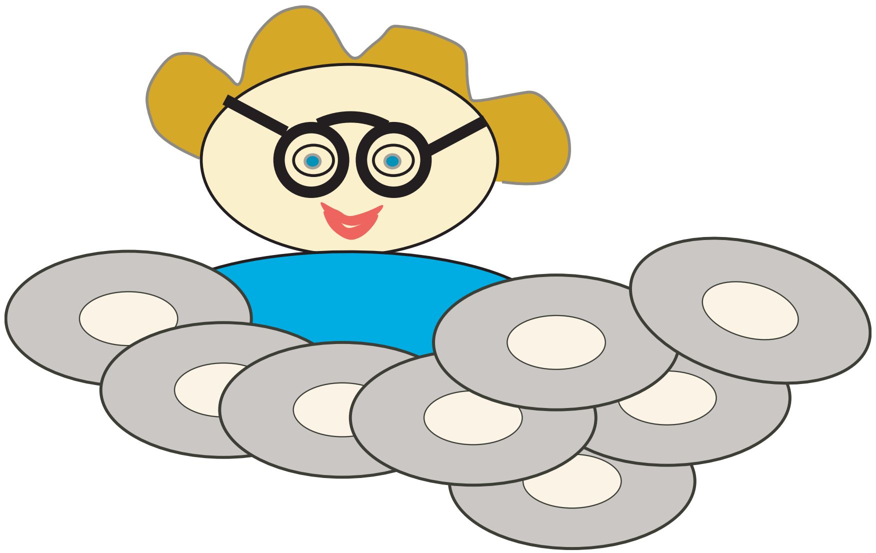
Esempi di problemi

QUAD. I-II

CD DI MUSICA

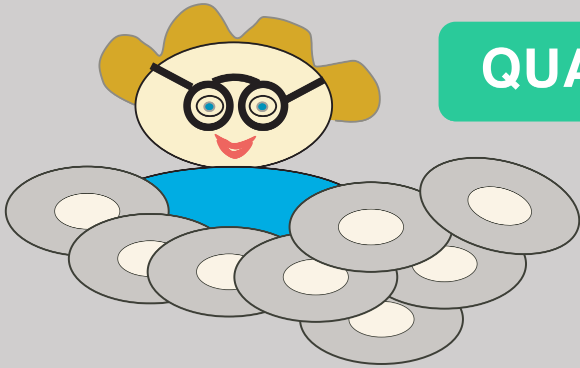
GENOVEFFA HA COMPERATO 10 CD.
3 SONO DI MUSICA CLASSICA
E GLI ALTRI SONO DI CANTI DELLA
MONTAGNA O DI MUSICA LEGGERA.

QUANTI POTREBBERO ESSERE
I DISCHI DI MUSICA LEGGERA?



QUAD. I-II

CD DI MUSICA



Dove sta il pensiero combinatorio?

Nell'attività di ricerca di **tutti i casi possibili**.

Gli alunni citano casualmente scomposizioni additive del 7:   3+4 , 5+2 , …

Ma alla domanda: «Sei sicuro di averli trovati tutti? » o all'intervento autoritario dell'insegnante «Ne avete dimenticato uno!»
(che sia vero o no) non sanno rispondere in modo esauriente.

Nasce la necessità di procedere secondo un **criterio** che va trovato.

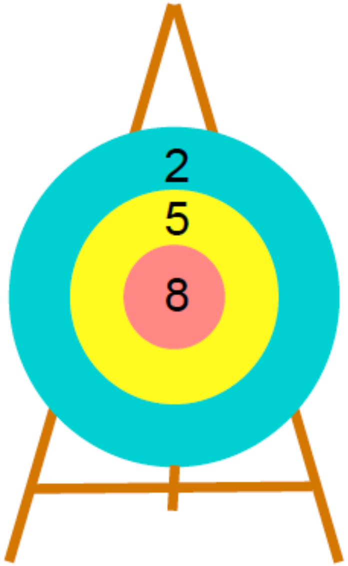
Per esempio 1+6 , 2+5 , 3+4 , 4+3 , 5+2 , 6+1

E lo zero? Si può discutere…

Sapyent

FILIBERTO L'ARCIERE

F. E. I



+	8	5	2
8	16	13	10
5	13	10	7
2	10	7	4

GUFO FILIBERTO HA FATTO DUE TIRI. ENTRAMBI HANNO COLPITO IL BERSAGLIO. QUANTI PUNTI POTREBBE AVER FATTO?

QUANTI **DIVERSI** PUNTEGGI POTREBBE AVER OTTENUTO?

QUALE RISULTATO È IL PIÙ FREQUENTE (CHE ESCE PIÙ VOLTE) ?

Sapyent

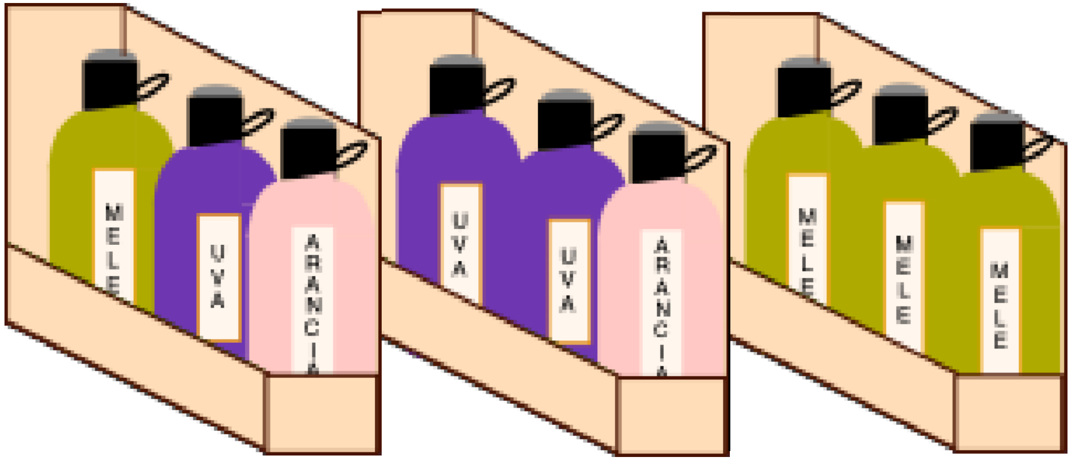
CONFEZIONI DI BOTTIGLIE

F. E. IV

Genoveffa ha in dispensa parecchie bottiglie di succo di uva, mela e arancia.

Vuole preparare confezioni di tre bottiglie ciascuna.

Per esempio:



Quanti tipi diversi di confezioni può allestire?

Sapyent

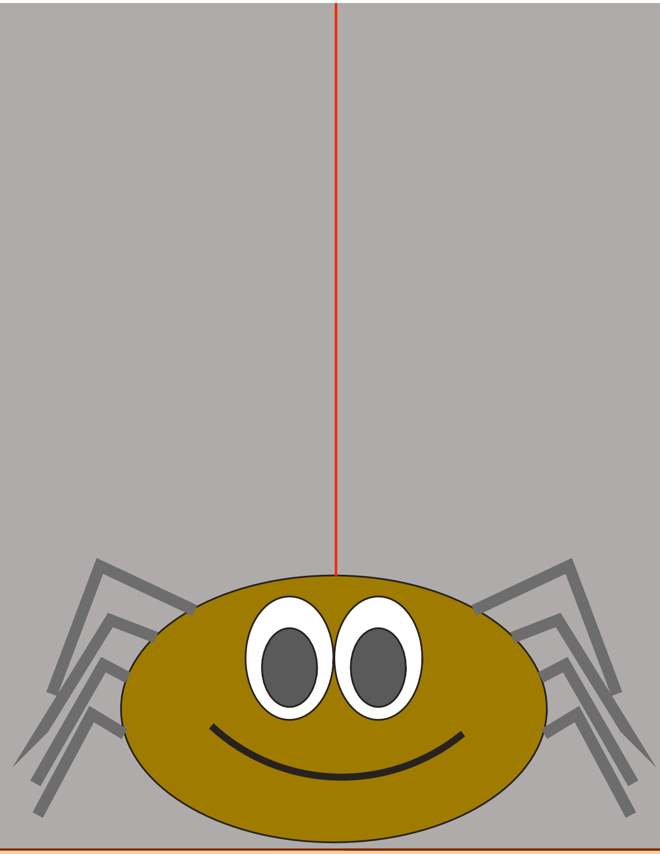
CONFEZIONI DI BOTTIGLIE: ESEMPIO DI RISOLUZIONE

F. E. IV

U	M	A
3	0	0
0	3	0
0	0	3
0	1	2
0	2	1
1	0	2
1	1	1
1	2	0
2	0	1
2	1	0

Ci sono 10 possibili confezioni, non una di più, non una di meno.

Sapyent

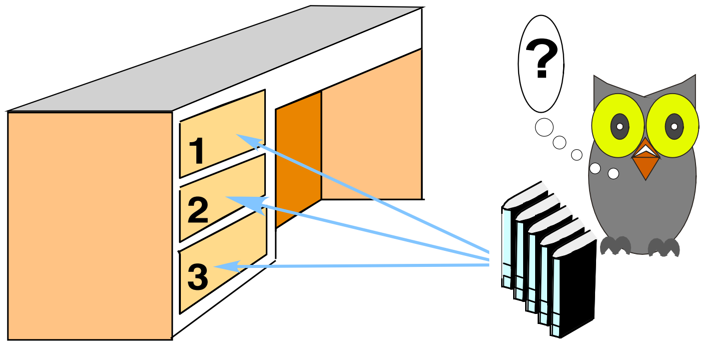


ESERCIZIO

QUANTE POSSIBILITÀ?

F. E. IV

Riporre libri nei cassetti



Filiberto è incaricato di riporre 5 nuovi libri nei cassetti della scrivania di Genoveffa.

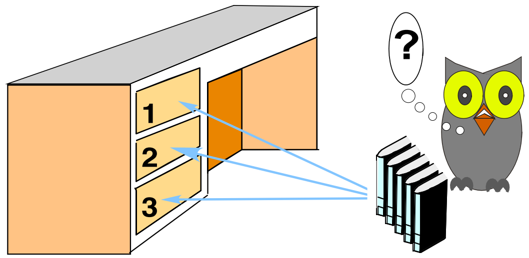
Può distribuirli come vuole, anche per esempio tutti nello stesso cassetto.

Quante possibilità ha?

QUANTE POSSIBILITÀ?

F. E. IV

(Riporre libri nei cassetti: soluzione)



Per riporre il primo libro Filiberto ha ……3…. possibilità.

Per ogni possibilità del primo libro Filiberto per il secondo libro ha ……3… possibilità.

In totale fanno …**3 x 3 = 9 = 3^2**…. possibilità.

Per riporre il terzo libro, Filiberto ha in totale **(3 x 3) x 3 = 27 = 3^3** possibilità.

(…)

Per riporre i 5 libri, Filiberto ha **3 x 3 x 3 x 3 x 3 = 243 = 3^5** possibilità

Per gli insegnanti

Per riporre n libri in k cassetti si hanno **k^n** possibilità.
Questo è uno dei risultati che si studiano alle superiori!

F. E. IV

IL SIGNOR FATTORIALE

Genoveffa conduce al cinema i tre amici **E**rcolino, **A**rturo e **F**iliberto. Entrati nella sala vedono quattro poltroncine vuote. Decidono di sedervisi.

In quanti modi potrebbero occupare le poltroncine?

4 x 3 x 2 = 24 = 4! modi

4! Si legge: 4 fattoriale.

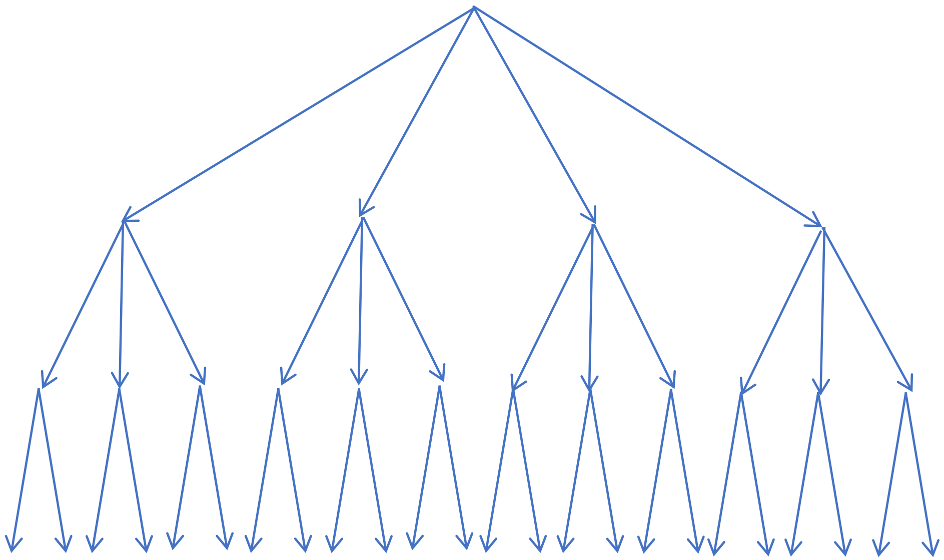
Sapyent

Altro esempio di risoluzione: l’albero combinatorio

Il primo ha
4 possibilità di scelta

Il secondo ha
3 possibilità di scelta

Il terzo ha
2 possibilità di scelta



Il quarto non può scegliere.
In totale si hanno 24 possibilità: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 = 4!$

L’albero è un criterio interessante, purché sia ragionevole disegnarlo. Più in là, l’alunno si limita a pensarlo.

Sapyent

Altro esempio di impiego del fattoriale: gli anagrammi di una parola

Precisazione: non è necessario che l'anagramma sia una parola della lingua italiana.

Esempio

Quanti anagrammi ha la parola APE?

APE – AEP

PAE – PEA

EAP – EPA

Totale: $6 = 3 \cdot 2 = 3!$

L'idea di disporre le lettere a seconda dell'iniziale è uno dei diversi criteri che si possono adottare.

Ciascuno è un procedimento **costruttivo combinatorio**.

Sapyent

Altro esempio

Quanti anagrammi ha la parola CANE?

CANE $\rightarrow$ $6 = 3 \cdot 2 = 3!$

ACNE $\rightarrow$ $6 = 3 \cdot 2 = 3!$

NCAE $\rightarrow$ $6 = 3 \cdot 2 = 3!$

ECAN $\rightarrow$ $6 = 3 \cdot 2 = 3!$

Totale: $4 \cdot 6 = 24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 4!$

APE (3 lettere): 3 x 2 = 6 = 3!

CANE (4 lettere): 4 x 3 x 2 = 24 = 4!

PORTA (5 lettere): 5 x 4 x 3 x 2 = 120 = 5!

CAMINO (6 lettere): 6 x 5 x 4 x 3 x 2 = 720 = 6!

Conosciamo meglio il fattoriale: esercizio di stima

3! = 6 4! = 24 5! = 120 6! = 720

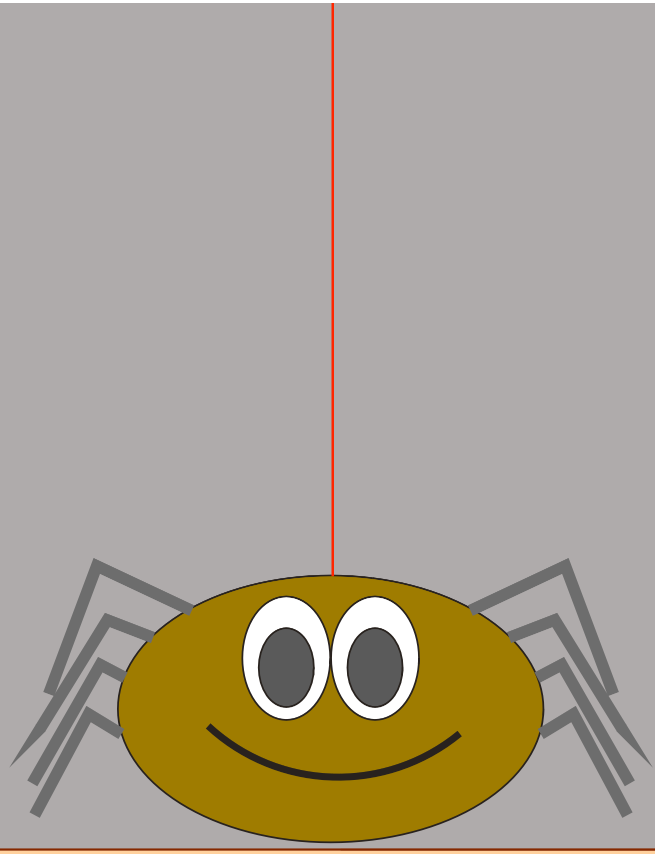
Stima personale: quanto fa 10! circa?

Tra 1000 e 10’000?
Tra 10’000 e 100’000?
Tra 100’000 e 1’000’000?
Tra 1’000’000 e 10’000’000?
Più di 10’000’000?

Calcolatrice

?

Sapyent



ESERCIZIO

F. E. IV

ROMPICAPI (LE PROFESSIONI)

Genoveffa ha conosciuto quattro nuovi amici: Anna, Beppe e Cristian
e li presenta a Filiberto, Ercolino e Arturo, in un modo un po’ strano.

Si sa che ciascuno esercita una professione fra le seguenti: artista, barista e cronista
e che Beppe non è artista.

Quale professione esercita ogni amico?

(Agli alunni si può dare il consiglio di rappresentare la situazione con una tabella o con un diagramma cartesiano).

Sapyent

ROMPICAPI (LE PROFESSIONI)

F. E. IV

	Anna	Beppe	Cristian
cronista	✗	sì	✗
barista	sì	✗	✗
artista	✗	✗	sì

Sapyent

APPENDICE

Anagrammi di parole con lettere ripetute

Quanti anagrammi ha la parola ...

ORO? (3 lettere, 2 uguali)

ORO ORO OOR OOR ROO ROO

totale: 3 = 3!/2!

TUTTO? (5 lettere, 3 uguali)

TUTTO

totale: 5! / 3! = 120 / 6 = 20

MAMMA? (5 lettere, 3 uguali, 2 uguali)

totale: (5! / 3!) / 2! = (120 / 6) / 2 = 10

Tratto da
<I nostri amici numeri>
estivo V

Percorsi su griglie piane

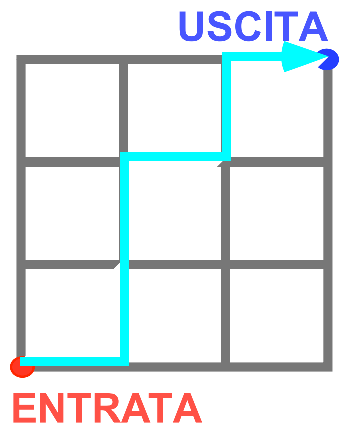
Quanti percorsi minimi esistono?

Nei nodi o si va o a destra o in alto.

Idea: codificare i percorsi.

→ destra (**d**), ↑ alto (**a**).

Ogni codice di percorso minimo
è una parola con 3 **d** e 3 **a**.



Dunque vi sono tanti percorsi minimi
quanti sono gli anagrammi della parola **dddaaa**.

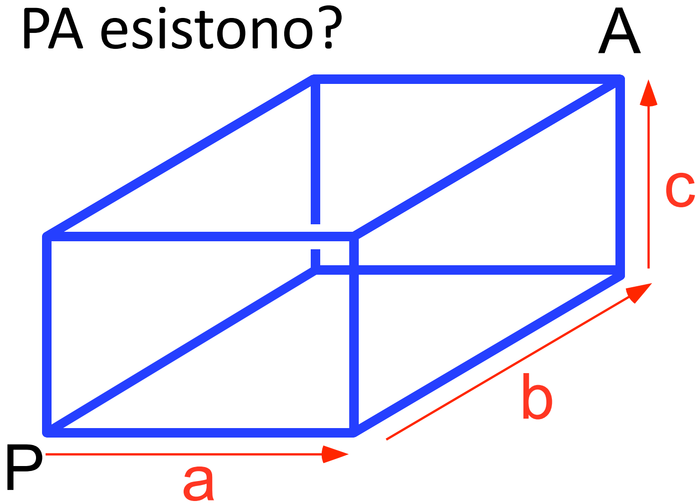
Esempio: **daadad**

In totale vi sono:

$(6! / 3!) / 3! = (720 / 6) / 6 = 20$ percorsi minimi.

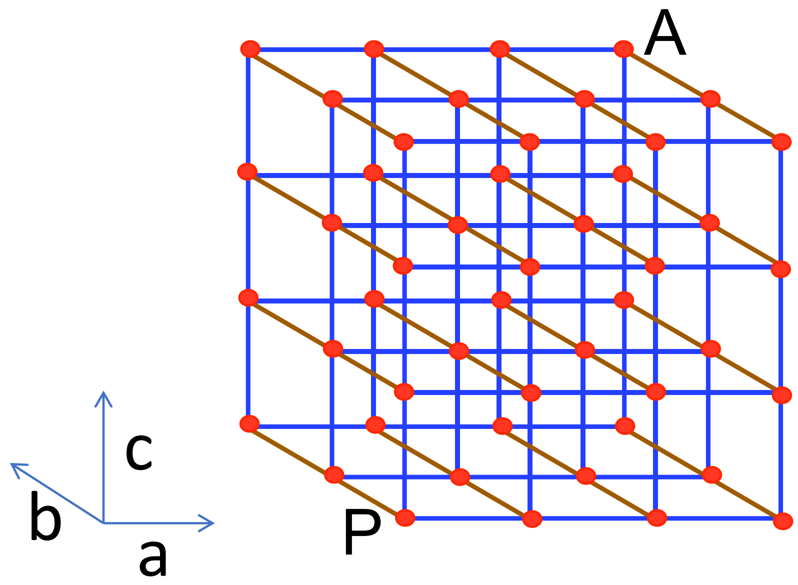
Percorsi su griglie 3D

Quanti percorsi minimi PA esistono?



Ogni percorso è codificabile con un anagramma di abc.

Dunque si hanno $3! = 6$ percorsi minimi



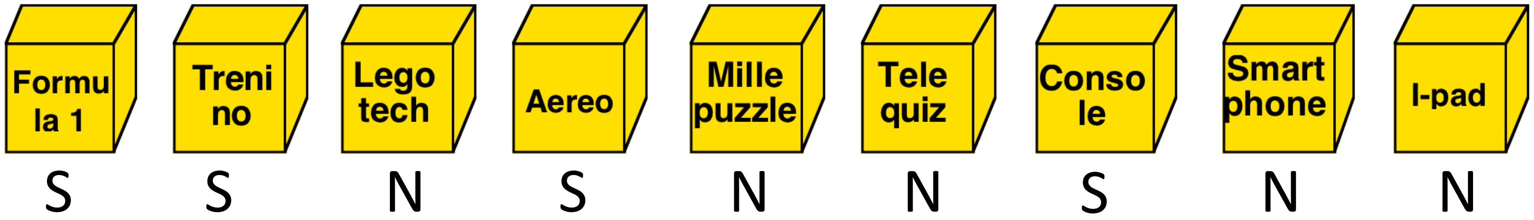
Ogni percorso PA è codificabile con un anagramma di aaabbccc.

Dunque si hanno $((8! / 3!) / 2!) / 3! = 20'160$ percorsi minimi

Altro uso degli anagrammi

Tratto da <I nostri amici numeri> estivo V

Il vincitore di una gara riceve 4 premi
che può scegliere fra i 9 disposti sul tavolo.



Quante scelte diverse ha a disposizione il vincitore?

Stima: 25? 50? 75? 100? 125? 150? 175? 200? di più?

Ogni possibile scelta del vincitore è codificabile con una parola di 9 lettere, 4 uguali a S (SÌ) e 5 a N (NO).

In totale: (9! / 4!) / 5! = 126 scelte a disposizione.

FINE LEZIONE 7