

LEZIONE 3

**La divisione completa
le operazioni aritmetiche
Introduzione alle frazioni**

Lezione 3

La divisione

Costruzione di algoritmi

(tecnica della divisione)

Da quad. IV-V



Le divisioni più semplici si possono risolvere con l'aiuto della tavola pitagorica:

$$56 : 7 = 8 \quad e \quad 56 : 8 = 7 \quad \text{perché } 7 \times 8 = 8 \times 7 = 56$$

Casi interessanti

$$120 : 4 = (120 : 2) : 2 = 60 : 2 = 30$$

$$\text{perché } 4 = 2 \times 2$$

$$300 : 15 = (300 : 3) : 5 = 100 : 5 = 20$$

$$\text{perché } 15 = 3 \times 5$$

Questo funziona quando il divisore può essere scomposto in un semplice prodotto.

Composizioni di divisioni

$$\xrightarrow{:2} \quad \xrightarrow{:2} \quad = \quad \xrightarrow{:4}$$

$$\xrightarrow{:2} \quad \xrightarrow{:3} \quad = \quad \xrightarrow{:6}$$

$$\xrightarrow{:3} \quad \xrightarrow{:3} \quad = \quad \xrightarrow{:9}$$

$$\xrightarrow{:3} \quad \xrightarrow{:5} \quad = \quad \xrightarrow{:15}$$

$$\xrightarrow{:2} \quad \xrightarrow{:5} \quad = \quad \xrightarrow{:10}$$

Ecc.

Tecnica della divisione

Da quad. IV-V

$$161 : 7 = (140 + 21) : 7 = (140 : 7) + (21 : 7) = 20 + 3 = 23$$

$$132 : 11 = (110 + 22) : 11 = (110 : 11) + (22 : 11) = 10 + 2 = 12$$

In questo caso occorre scomporre il dividendo in una somma di multipli del divisore.
E se ci fosse un resto?

$$131 : 9 = (81 + 45 + 5) : 9 = (81 : 9) + (45 : 9) + (5 : 9) = 9 + 5 + (5 : 9) = 14 + (5 : 9)$$

L'ultima parentesi per ora non la calcoliamo.
Si dice pure che il risultato è 14 con resto 5.



Riflessione didattica

Due aspetti della divisione:

La **ripartizione equa**

Situazione basilare:

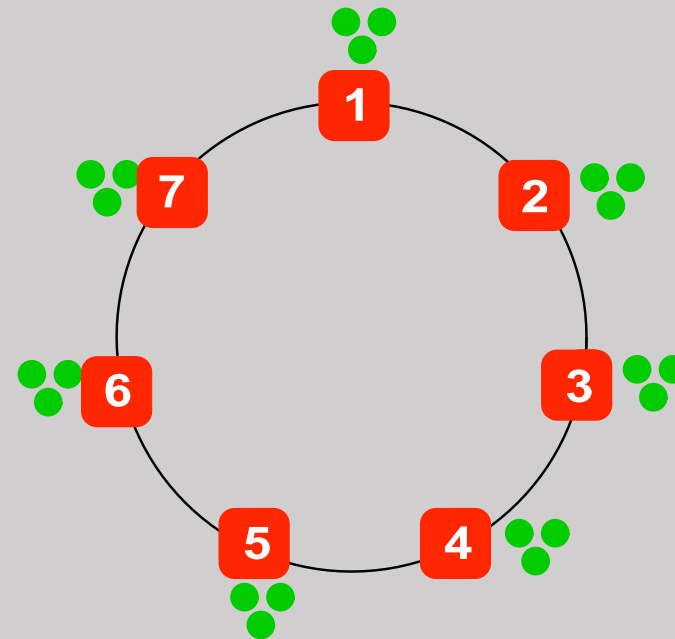
un insieme di oggetti da distribuire
a un gruppo (per esempio)
di bambini in modo che ciascuno,
se possibile, riceva
lo stesso numero di oggetti.

Schematicamente:

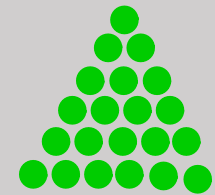
Ogni bimbo riceve 3 oggetti.

Fin qui tutto bene, ma...

7 bambini



21 oggetti



Scriviamo $21 : 7 = 3$

e osserviamo che $3 \times 7 = 7 \times 3 = 21$

Riflessione didattica

E se gli oggetti fossero 25?

Quando si è distribuito il 21.mo oggetto, ne rimangono ancora 3.

Il problema però **non** è forzatamente impossibile, può avere almeno due soluzioni.

La prima: ogni bimbo riceve 3 oggetti e ne rimangono 4 non distribuiti. Il numero 4 è il resto della divisione.

La seconda: ci si procurano altri 3 oggetti. Con 28 oggetti l'operazione è possibile.

$28 : 7 = 4$, ogni bimbo riceve 4 oggetti.

Questo per dire che a volte problemi giudicati impossibili con la frase standard *non si può* possono essere risolti... con un po' di fantasia, staccandosi da forme di ragionamento abituali.

Riflessione didattica

La **contenenza**.

Non è altro che il problema inverso della ripartizione equa.

Per esempio: gli oggetti sono 21 e ogni bimbo ne riceve 3; quanti sono i bimbi?

Si tratta di trovare quante volte il 3 è **contenuto** nel 21, cioè:

quante volte occorre addizionare il 3 con se stesso per ottenere 21.

Il calcolo può essere facilitato se si usano i «**muretti prefabbricati** di mattoni 3».

Infatti se uso il 3 ed eseguo la lunga addizione $3 + 3 + \dots + 3$ (con 7 addendi), il calcolo è, sì, possibile e corretto, ma lungo.

In certi casi lunghissimo, tanto da far desistere dal continuare.

Se però usiamo i muretti prefabbricati (di 2, di 5, di 10, di 20, ... mattoni) allora l'operazione si semplifica parecchio.

Esempio: $3 \times 5 + 3 \times 2 = 15 + 6 = 21$, il risultato è $5 + 2 = 7$

Questa tecnica la usiamo anche per le divisioni più difficili.

Divisione (situazioni non agevoli)

$845 : 65 = ?$ Cioè: quante volte il 65 sta in 845?

Sfruttiamo l'idea dei muretti prefabbricati di mattoni 65.

$$\xrightarrow{65 \times 10} 650 \xrightarrow{+ 65 \times 3} 845$$

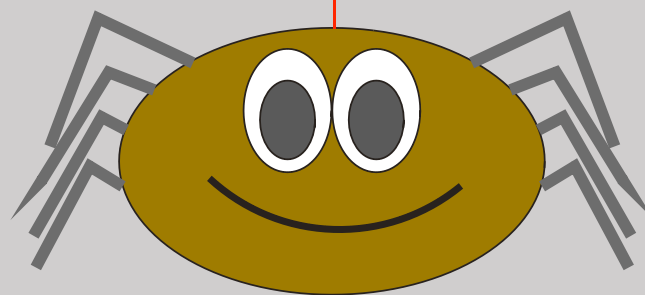
$$845 : 65 = 10 + 3 = 13$$

$2632 : 56 = ?$

$$\xrightarrow{56 \times 20} 1120 \xrightarrow{+ 56 \times 20} 2240 \xrightarrow{+ 56 \times 5} 2520 \xrightarrow{+ 56 \times 2} 2632$$

$$2632 : 56 = 20 + 20 + 5 + 2 = 47$$

Si potrebbe anche operare con 56×10 . La catena si allunga un po', ma il calcolo risulta più facile.



ESERCIZIO

Esempi di divisioni

$$63 : 7 = 9 \text{ (dalle tabelline)}$$

$$91 : 7 = (70 + 21) : 7 = (70 : 7) + (21 : 7) = 10 + 3 = 13$$

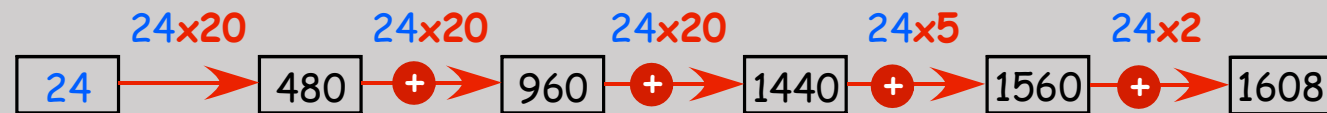
(scomposizione in multipli del divisore)

$$720 : 80 = 72 : 8 = 9 \text{ (uso semplice della proprietà invariantiva)}$$

$$132 : 33 = (132 : 11) : (33 : 11) = 12 : 3 = 4 \text{ (uso più raffinato)}$$

$$132 : 33 = (132 : 3) : (33 : 3) = [(120+12) : 3] : 11 = 44 : 11 = 4$$

Esecuzione con la catena di operatori. $1608 : 24 = ?$



Dunque: $1608 : 24 = 20 + 20 + 20 + 5 + 2 = 67$

Altre divisioni per esercizio

$$117 : 9 =$$

$$6400 : 80 =$$

$$1750 : 250 =$$

$$258 : 43 =$$

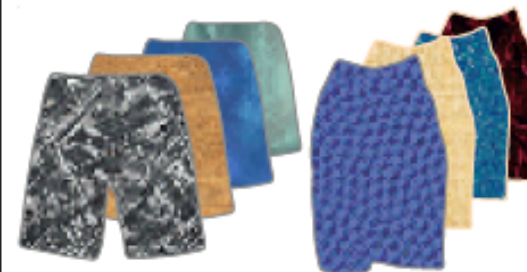
$$1742 : 67 =$$

Problemi su moltiplicazione e divisione

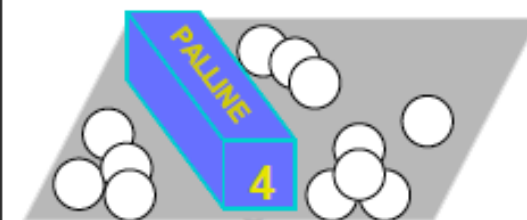
Da quad. III

49 pantaloncini da uomo e 36 gonne devono essere distribuiti equamente, nell'ordine, a 7 reparti uomo e a 6 reparti donna.

Quanti capi di vestiario riceve ciascun reparto?

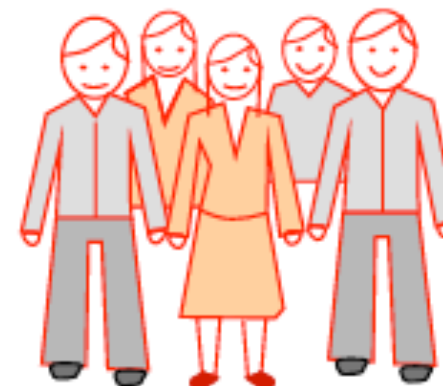


100 palline da tennis devono essere messe in scatole da 4.
Quante scatole occorrono?



È possibile...

- trasportare 72 alunni con scuolabus da 12 posti?
Se sì, quanti scuolabus sono necessari?
- formare squadre di 6 giocatori con 56 giocatori a disposizione?
Se sì, quante squadre?



Lezione 3

Introduzione alle frazioni

Le frazioni

Sono strettamente legate alla divisione.
Che cosa proporre ad alunni della Primaria?

La frazione come parte di un intero
La frazione applicata a una grandezza
La frazione come numero

Da non dimenticare:

Frazioni equivalenti
La frazione come percentuale
La frazione come misura della probabilità

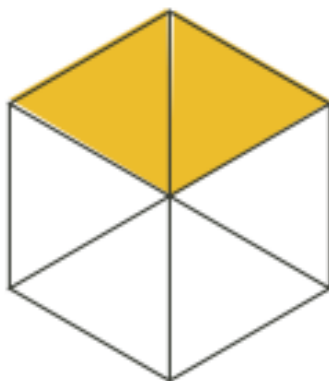
La frazione come parte di un intero

Da quad. IV-V

Sotto a ogni figura scrivi la frazione corrispondente alla superficie colorata



$$\frac{3}{6}$$



$$\frac{2}{6}$$



$$\frac{2}{6}$$



$$\frac{3}{6}$$

Per insegnanti

Invariante è l'area, non la figura.

La frazione applicata a una grandezza

Da quad. IV-V

Per iniziare...

Genoveffa si sta recando a un convegno scientifico in una località che dista 210 km.

Quanti km avrà percorso quando si troverà:

a metà del viaggio?	
a $\frac{1}{5}$ del viaggio?	
a $\frac{1}{7}$ del viaggio?	
a $\frac{3}{10}$ del viaggio?	
a $\frac{0}{19}$ del viaggio?	
a $\frac{7}{7}$ del viaggio?	
a $\frac{5}{100}$ del viaggio?	
a $\frac{1}{20}$ del viaggio?	

$$\frac{42}{210} = \frac{42 : 7}{210 : 7} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{140}{210} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$$

Che frazione dell'intero percorso avrà fatto quando ci avverte di avere già percorso 42 km? e più tardi 140 km?

La frazione applicata a una grandezza

Da quad. IV-V

8 L	$\frac{3}{4}$	6 L = 600 <u>.....</u> cL
280 km	$\frac{3}{7}$	 km = hm
170 kg	$\frac{7}{10}$	 kg = hg

Il passaggio **all'unità frazionaria** è la carta vincente.

Per trovare i $\frac{3}{4}$ della grandezza 8 L, trovo dapprima $\frac{1}{4}$ (divido per 4) e poi multiplico per 3.

Si usa scrivere: $\frac{3}{4}(8 \text{ L}) = 6 \text{ L}$

Le cosiddette semplificazioni/amplificazioni di frazioni non sono altro che la proprietà invariante della divisione.

La frazione applicata a una grandezza: problema inverso

Da quad. IV-V

Di una certa somma conosciamo solo i suoi $\frac{3}{100}$ che sono 36 €.
Vogliamo sapere qual è questa somma. Come faresti?

I 36 € sono **tre** centesimi della somma.

Allora **un** centesimo di questa somma sono $36 : 3 = 12$ €.

E la somma intera? Basta ricordare che l'intero è **cento** centesimi,
dunque la somma che cerchiamo è $12 \times 100 = 1200$ €.

Schematicamente:

frazione	frazione unitaria	intero
$\frac{3}{100} \rightarrow 36 \text{ €}$	$\frac{1}{100} \rightarrow 36 \text{ €} : 3 = 12 \text{ €}$	$\frac{100}{100} \rightarrow 12 \text{ €} \times 100 = 1200 \text{ €}$

L'importanza del passaggio all'unità frazionaria

Sia nel problema diretto sia in quello inverso abbiamo applicato il passaggio all'unità frazionaria.

Non si tratta di uno dei tanti modi possibili per risolvere: è **il** modo che permette all'alunno di capire senza dover memorizzare due algoritmi ben diversi, ma facilmente confondibili se appresi mnemonicamente.

Algoritmo diretto

«divido per il denominatore e multiplico per il numeratore»

Algoritmo inverso

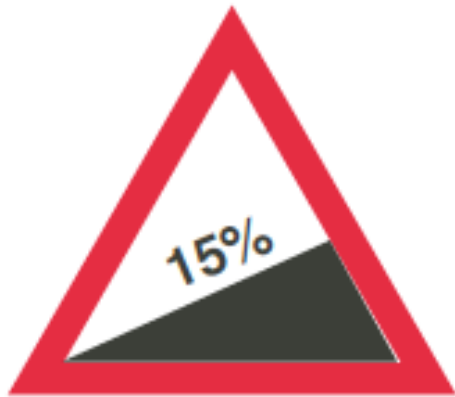
«divido per il numeratore e multiplico per il denominatore»

Non occorre essere specialisti in didattica per capire che il ricorso all'algoritmo preconfezionato molto presto diventa una sorta di scelta casuale tra i due.

Esempi di problemi

Da quad. IV-V

Pendenza delle strade



Questo cartello indica la pendenza massima di una strada. Significa che su 100 m la strada sale di 15 m.

Quale sarebbe il dislivello su 3 km di pendenza massima?

Il dislivello corrisponde al 15% del percorso. 15% significa 15/100.

Dobbiamo calcolare $\frac{15}{100}$ di 3000 m, cioè

$$\frac{1}{100} \text{ di } 3000 \text{ m} = 3000 : 100 = 30 \rightarrow \frac{15}{100} \text{ di } 3000 \text{ m} = 30 \times 15 = 450(\text{m})$$

Esempi di problemi

Da quad. IV-V

Cestisti

Jim, Jeff e John sono tre grandi campioni di basket.

Sulla base dei risultati dello scorso campionato si vuole sapere chi è stato il migliore nei tiri liberi. Jim ha ottenuto 13 canestri su 20 tentativi, Jeff 16 su 25 e John ne ha realizzati il 65,5 %.

Chi è stato il migliore?

$$\text{Jim} \rightarrow 13 \text{ su } 20, \text{ cioè } \frac{13}{20} = \frac{13 \times 5}{20 \times 5} = \frac{65}{100} = 65\%$$

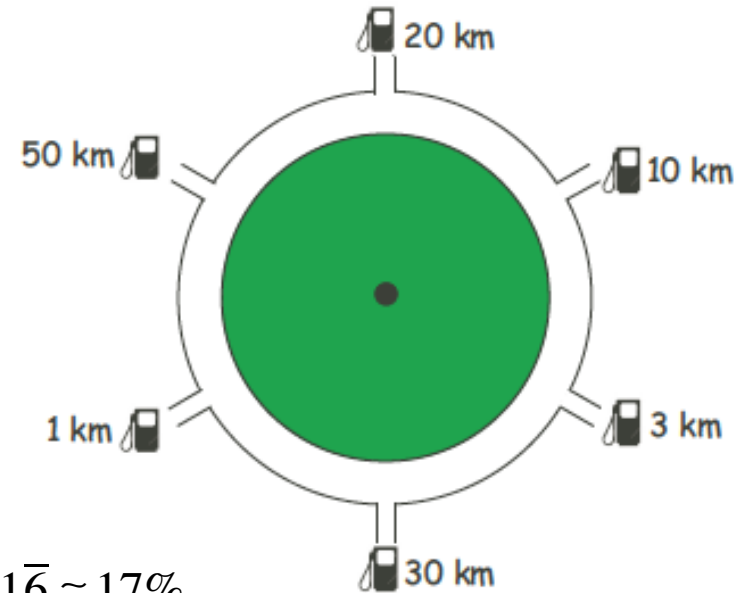
$$\text{Jeff} \rightarrow 16 \text{ su } 25, \text{ cioè } \frac{16}{25} = \frac{16 \times 4}{25 \times 4} = \frac{64}{100} = 64\%$$

Bravi tutti e tre, non vi pare?

L'automobilista straniero

Si trova nella rotatoria, è a corto di benzina e non può sapere quanto distanti sono le stazioni di servizio. Decide di prendere un'uscita a caso. Che probabilità ha di non restare a secco, se ha un'autonomia di 2 km? Di 25 km? Di 60 km?

Da quad. IV-V



autonomia di 2 km $\rightarrow$ 1 su 6 $\rightarrow$ probabilità = $\frac{1}{6} = 0,1\bar{6} \cong 17\%$

autonomia di 25 km $\rightarrow$ 4 su 6 $\rightarrow$ probabilità = $\frac{4}{6} = 0,6\bar{6} \cong 67\%$

autonomia di 50 km $\rightarrow$ 6 su 6 $\rightarrow$ probabilità = $\frac{6}{6} = 1 = 100\%$

FINE LEZIONE 3