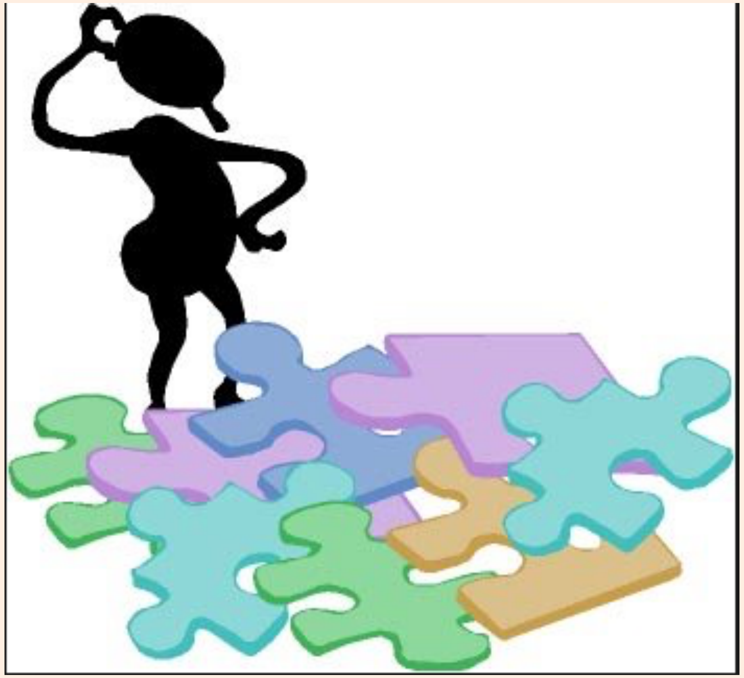
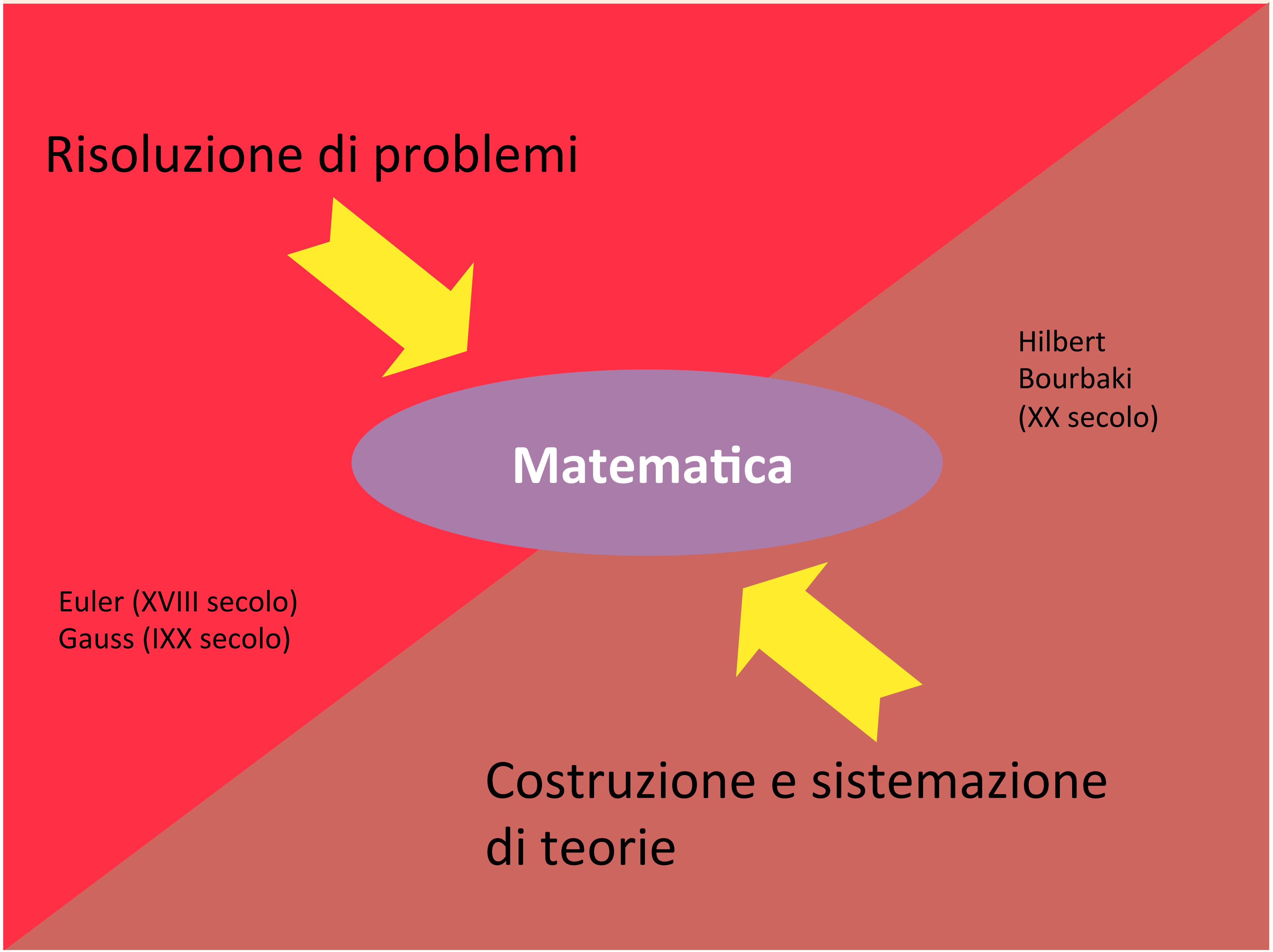
Problemi per tutti



Castel San Pietro Terme, 4-5-6 novembre 2016

Gianfranco Arrigo, SMASI Lugano, NRD Bologna

Due anime della matematica


Risoluzione di problemi
Hilbert
Bourbaki
(XX secolo)
Matematica
Euler (XVIII secolo)
Gauss (IXX secolo)
Costruzione e sistemazione
di teorie

Due facce dell'apprendere

Apprendimento strategico

Sviluppo del pensiero divergente (intuizione, creatività)
Socializzazione dell'apprendimento (apprezzamento delle idee altrui, confronto razionale)
Fiducia in se stessi
Interesse per l'attività matematica

Didattica

Acquisizione di concetti e procedimenti
Organizzazione delle conoscenze
Differenziazione
Autovalutazione

Apprendimento concettuale

Il problema in matematica

Che cos'è un (vero) problema

Un problema sorge quando un essere vivente, motivato a raggiungere una meta, non può farlo in forma automatica o meccanica, cioè mediante un'attività istintiva o attraverso un comportamento appreso.

Kanizsa G. (1973). Il «problem solving» nella psicologia della Gestalt. In: Mosconi G., D'Urso V. (a cura di). *La soluzione dei problemi*. Firenze: Giunti-Barbera, p. 35.

Gli altri "problemi", in particolare quelli più diffusi di applicazione di conoscenze note, li chiamiamo "esercizi".

di fronte a un problema nuovo…

Acquisire fiducia in se stessi

… siamo tutti ai piedi della scala

tentiamo per gioco…

ogni tentativo può essere utile…

… e chi tenta, prima o poi, ci azzecca

anche il più piccolo passo verso la meta…

è fonte di grande soddisfazione.

… s’impara a confutare razionalmente

s’impara a formulare congetture

… si esprimono le proprie idee giustificandole

… s’impara ad ascoltare

… s’impara a lavorare insieme
in piccoli gruppi…

Interagire
con i propri
compagni

Fare
matematica
col piacere

...di costruire.

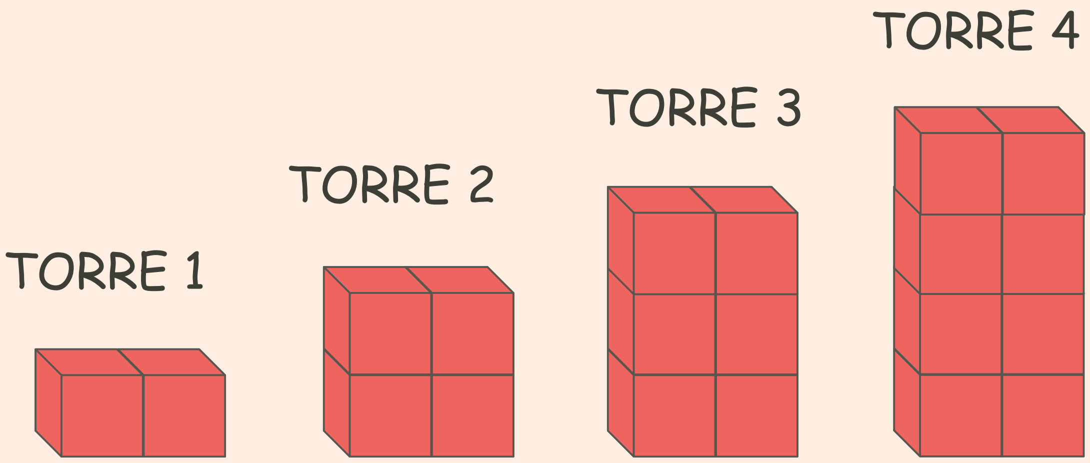
... di agire...

... di pensare liberamente
senza timore di sbagliare ...

... di vivere un'affascinante avventura,
l'avventura della matematica

Esempi di problemi

Torri di cubetti



Domande possibili

Di quanti cubetti si compone ogni torre?

Disegna (o costruisci) la TORRE 5. Di quanti cubetti si compone?

Di quanti cubetti si compone una TORRE 6? una TORRE 10? Una TORRE 100? Una TORRE n?

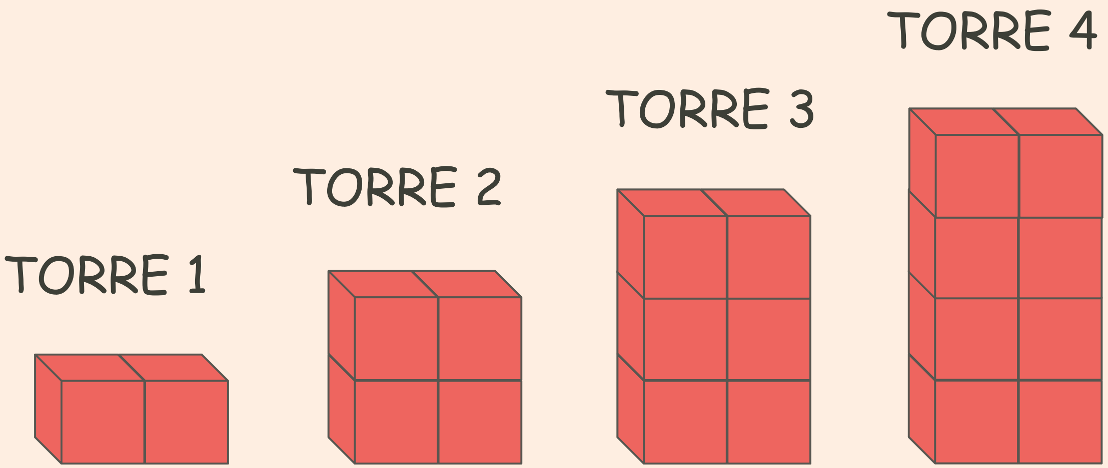
Torri di cubetti: presentazione alla classe

Ai bimbi. Mettere a disposizione le 4 torri già costruite, oppure una scatola di cubetti (tutti uguali fra loro) e far costruire le torri disegnate (o descritte a parole).

Ai ragazzini. Dare la figura della dia e stimolarli a riflettere sulla continuazione della successione. In caso di difficoltà, mettere a disposizione i cubetti.

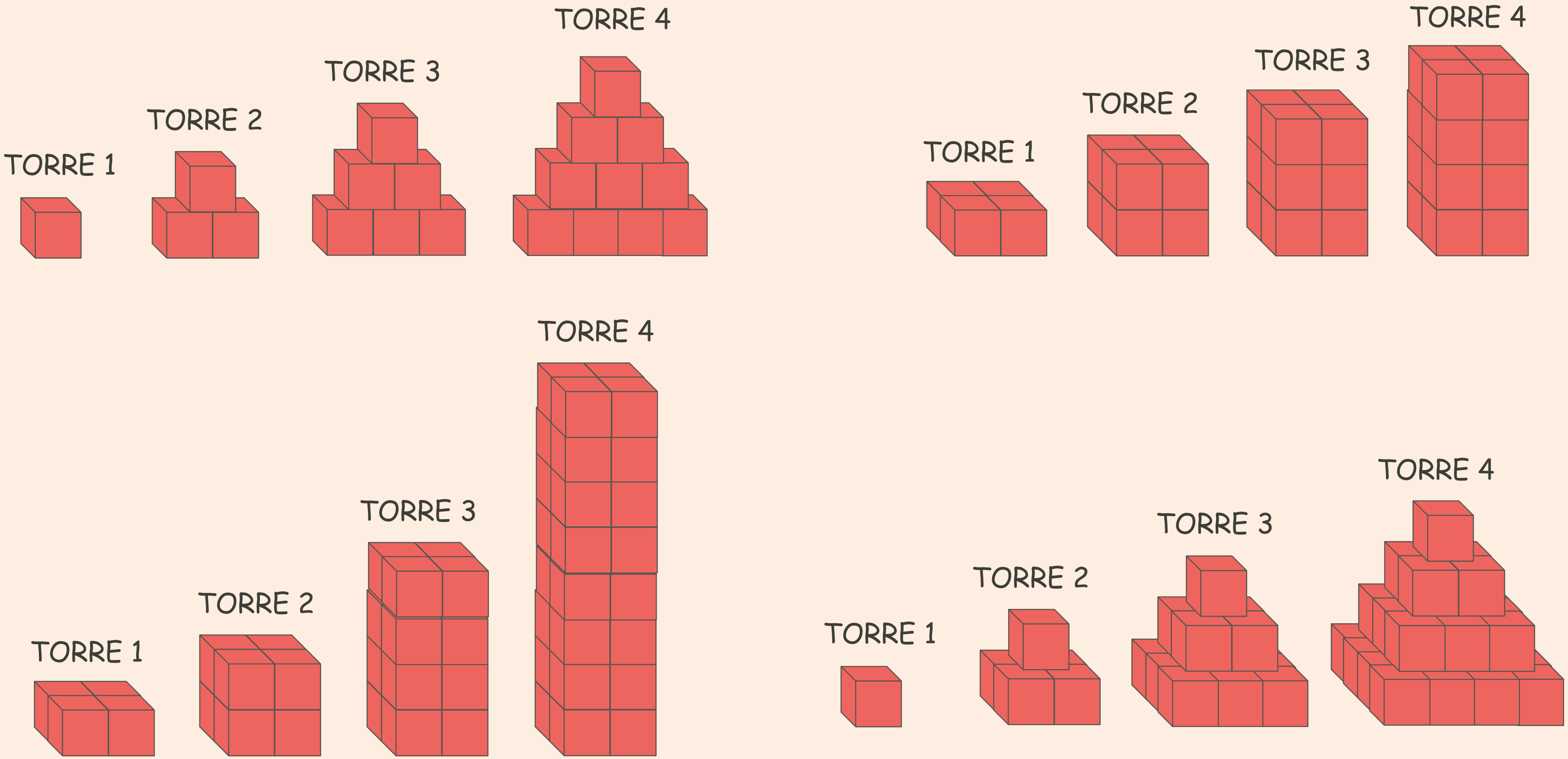
A studenti più maturi. Dare solo la figura della dia precedente e spingerli direttamente a generalizzare (TORRE n).

Torri di cubetti: soluzione



TORRI	1	2	3	4	5	6	10	100	n
cubetti	2	4	6	8	10	12	20	200	2 n

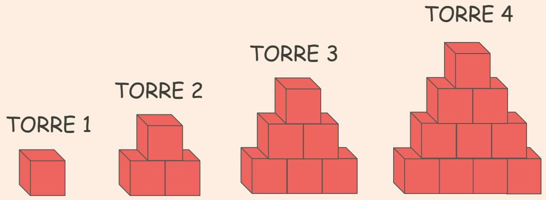
Torri di cubetti: rilanci possibili



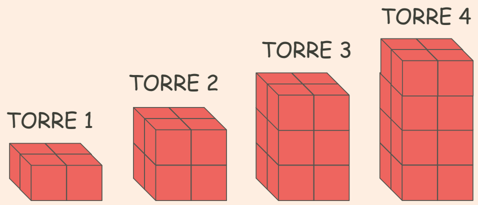
Domande possibili

Di quanti cubetti si compone una TORRE 5? una TORRE 10? Una TORRE n?

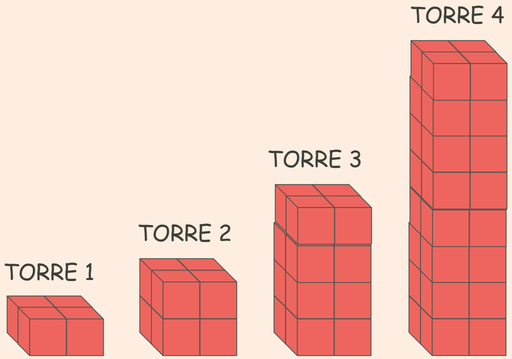
Torri di cubetti: **soluzioni**



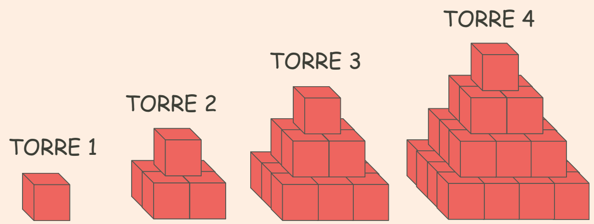
TORRI	5	10	n
cubetti	15	55	n (n+1)/2



TORRI	5	10	n
cubetti	20	40	4 n

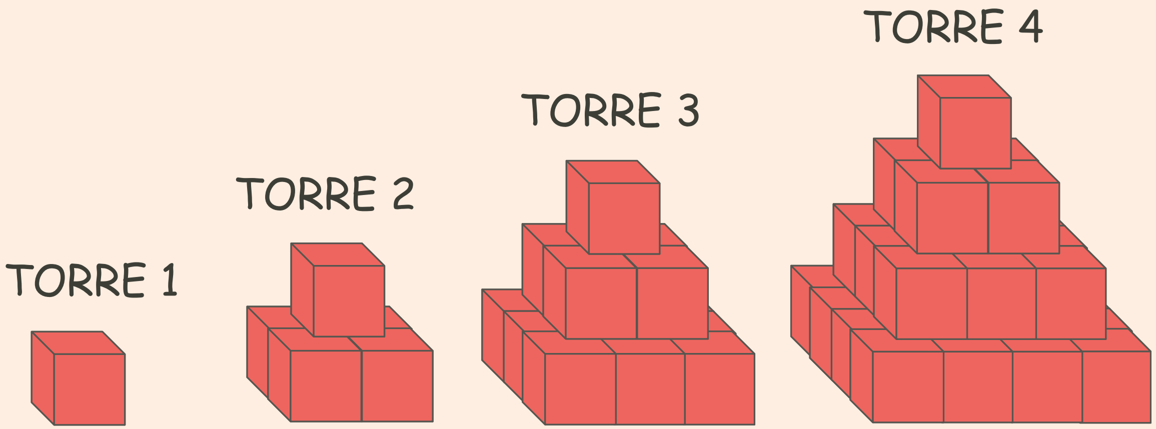


TORRI	5	10	n
cubetti	64	2048	2^(n+1)



TORRI	5	10	n
cubetti	55	385	n (n+1) (2n+1)/6

Torri di cubetti: **calcolo mentale ragionato**



Torre 10, quanti cubetti?

$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 =$

10

20

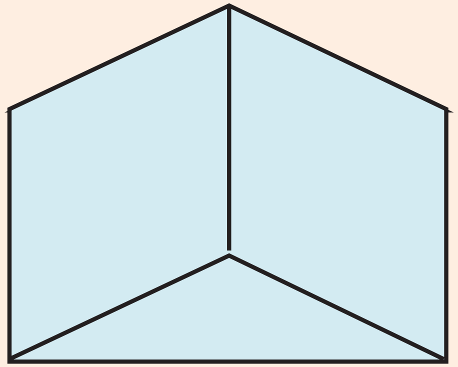
100

130

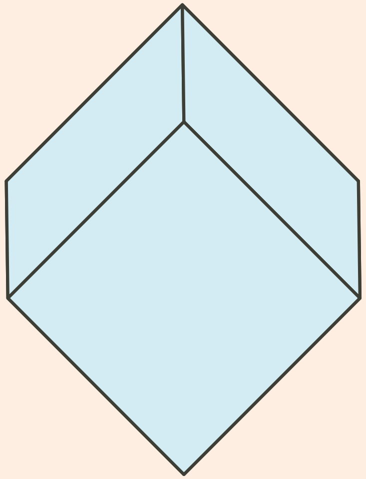
$= 10 + 20 + 25 + 100 + 130 + 100 = 385$

Prismi e piramidi

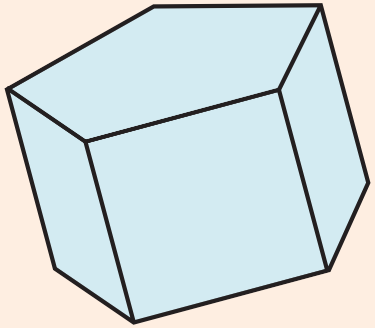
Modellini da manipolare (scheletrati e no, di cartoncino, di legno, ecc.)



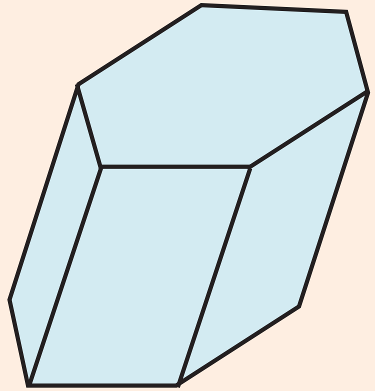
prisma triangolare



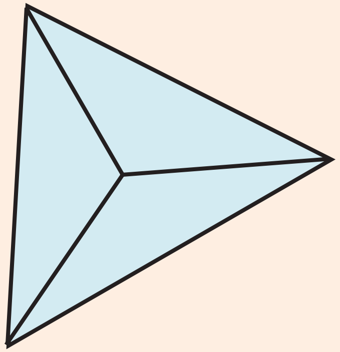
cubo



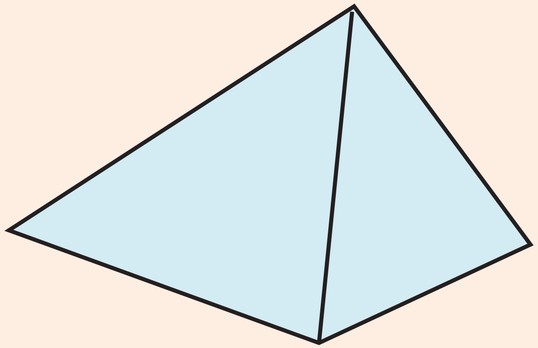
prisma pentagonale



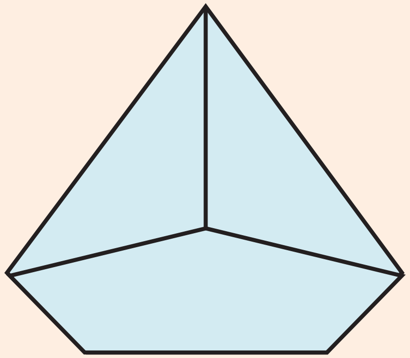
prisma esagonale



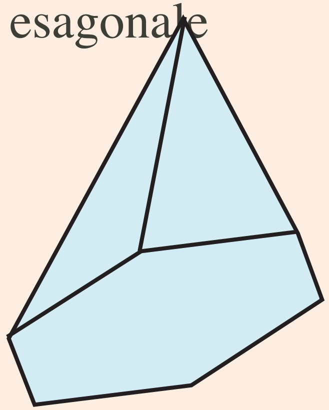
tetraedro



piramide quadrangolare



piramide pentagonale



piramide esagonale

Prisme e piramidi

Prima attività: contare/calcolare vertici (v), spigoli (s) e facce (f)

Tabella 1 da completare con l'ausilio dei modellini

solido	numero vertici	numero spigoli	numero facce
prisma triangolare			
…			

Tabella 2 da completare senza disporre di modellini

solido	vertici	spigoli	facce
prisma ottagonale			
piramide ottagonale			
prisma endecagonale			
piramide endecagonale			

Prismi e piramidi

Seconda attività: scoperta della formula di Eulero

Domande possibili sulla base delle tabelle completate

Se si osservano i tre numeri (v, s, f) di ogni solido,
quale caratteristica costante si può notare?

Mettendo insieme v e f ci si può avvicinare a s? Di quanto?

Scrivi con tue parole quello che hai scoperto.

Ciliegina finale

Hai trovato la formula di Eulero (XVIII secolo), uno dei più grandi matematici della storia. Complimenti!

Prismi e piramidi

Terza attività: colorare le facce di un solido

Immaginiamo di colorare le facce dei solidi in modo che due facce adiacenti abbiano colori diversi. Si potrebbe, per esempio, cambiare colore a ogni faccia, ma, così, saremmo degli spreconi.
Nasce l'idea di usare il minor numero possibile di colori.

Domande possibili

Quanti colori al minimo occorre usare per ciascun solido?

È vero che per un solido che ha molte facce ci vogliono più colori di uno che ne ha meno?

È vero che tutto dipende dalla faccia caratteristica?

In che modo?

Prisimi e piramidi

Terza attività: colorare le facce di un solido

Si possono riassumere i risultati in una tabella come la seguente:

solido	nr. lati faccia caratteristica	nr. minimo colori
prisma triangolare	3	4
prisma quadrangolare	4	3
(…)		

Risultato interessante

Il numero minimo di colori dipende **solo dalla parità** del numero di lati della faccia caratteristica.

Gli alberi nella risoluzione di problemi

Abdul e il sultano

Adattamento di un gioco tratto da Gamow e Stern, (1961), *Jeux mathématiques*, Paris: Dunod, p. 14-16.

Il suddito Abdul si è macchiato di una grave colpa e viene condannato a morte. Il sultano Ibn-al-Kuz , un sovrano ispirato e teso a trasformare il sultanato in uno stato moderno, fa portare due urne e fa inserire tre palline bianche nella prima e tre palline nere nella seconda. Il condannato, con gli occhi bendati è invitato a scegliere un'urna dalla quale estrarre una pallina. Se questa sarà bianca, il condannato sarà liberato, altrimenti verrà giustiziato.

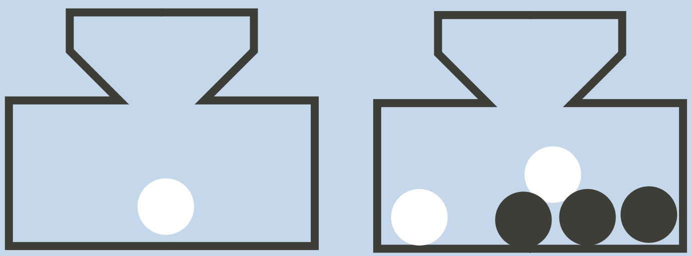
A questo punto Abdul chiede un ultimo desiderio: poter ridistribuire le palline nelle due urne, ciò che gli viene concesso perché, dice il gran vizir, ci saranno sempre tre palline bianche e tre nere.

Così facendo, Abdul ha aumentato la probabilità di sopravvivere?

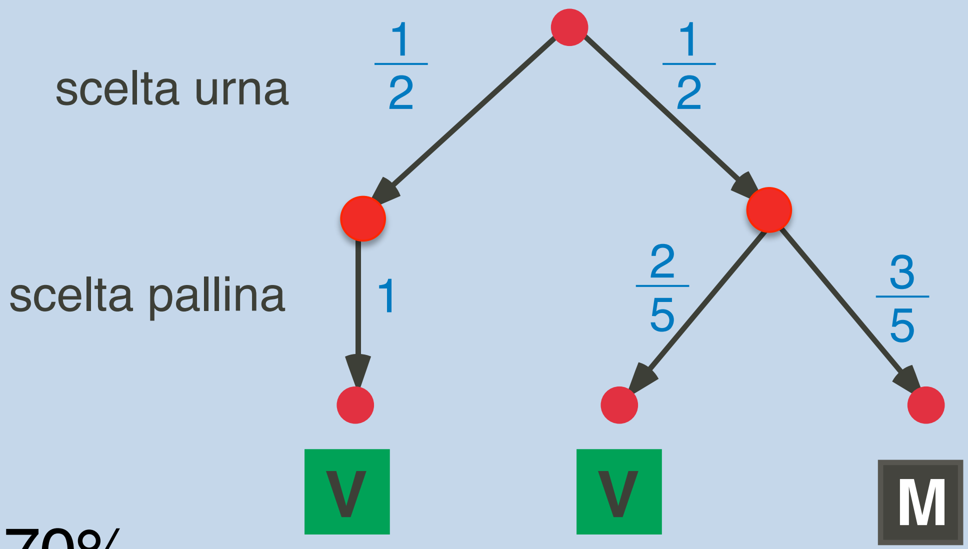
Gli alberi nella risoluzione di problemi

Sì, l'ha aumentata considerevolmente. Vediamo perché. Con la distribuzione iniziale, Abdul aveva una possibilità su due (probabilità 0,5=50%) di scegliere l'urna con le palline bianche e quindi di salvarsi.

Ecco come Abdul ridistribuisce le palline:



Albero risolutivo



Calcolo:

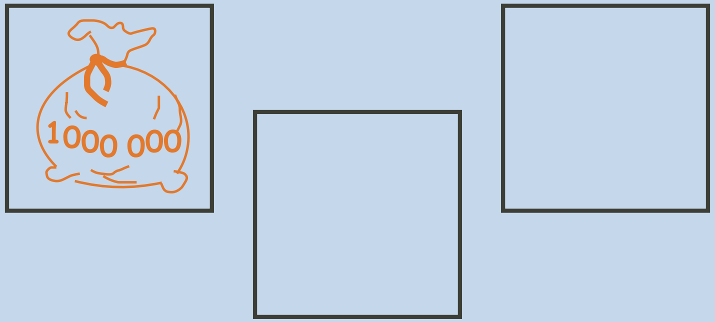
$$P(V) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{7}{10} = 0{,}7 = 70\%$$

Gli alberi nella risoluzione di problemi

Il dilemma di Monty Hall

Ci sono tre contenitori A, B, C e in uno solo di essi il gestore del gioco pone un ricco premio.

Chiede a uno dei presenti di provare a indovinare dove sta il premio.



Il giocatore sceglie, per esempio, il primo contenitore, ma **non lo apre**.

Il gestore apre un contenitore vuoto, lo mostra al giocatore e gli propone di cambiare la scelta iniziale.

Il giocatore farà bene a cambiare, oppure no?

Gli alberi nella risoluzione di problemi

Il **problema di Monty Hall** è diventato famoso grazie al gioco televisivo statunitense *Let's Make a Deal.*

Prende il nome dal conduttore dello show, Maurice Halprin, noto con lo pseudonimo di Monty Hall.

Nel gioco vengono mostrate al concorrente tre porte chiuse; dietro a una si trova una lussuosa automobile, mentre ciascuna delle altre due nasconde una capra.

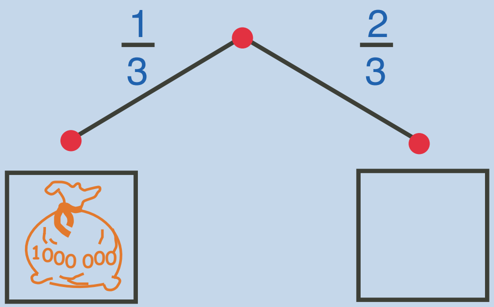
Il resto lo conosciamo.

Negli USA Il gioco suscitò un'accesa controversia finita anche sulla rivista "Parade" nel 1990.

In realtà si tratta di una variante del "Paradosso delle tre carte" di Warren Weaver (1950) il quale, a sua volta, l'aveva preso dal "Paradosso delle tre scatole" proposto dal matematico francese Joseph Bertrand nel 1889.

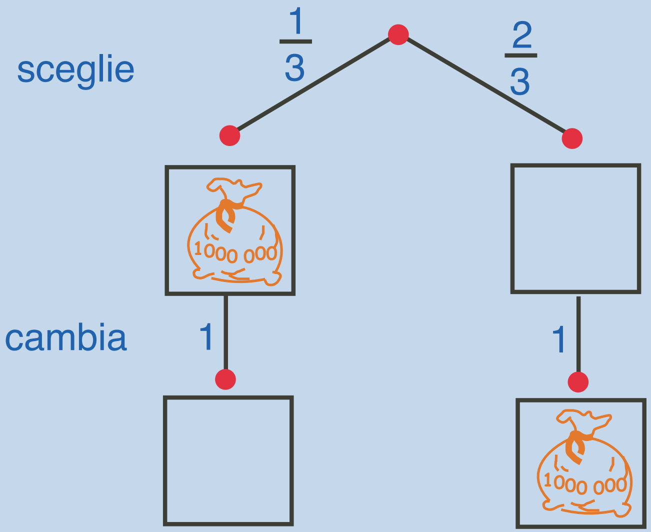
Una soluzione del problema di Monty Hall

Se il giocatore rimane sulla scelta iniziale…



Probabilità di vincere il premio: $\frac{1}{3}$

Se il giocatore cambia la scelta iniziale…



Probabilità di vincere il premio:

$$\frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

Divisori…

L’amnistia (da un’idea di Artur Engel, 1972)

Nella lontana Repubblica di Sikinia si celebra l’anniversario della costituzione. Per l’occasione, il presidente decide di concedere l’amnistia a un certo numero di carcerati.

La prigione si compone di 100 celle, numerate da 1 a 100. In ogni cella c’è un carcerato. La porta di ogni cella, sull’esterno, ha una maniglia che può essere girata in due sole posizioni: aperta (A) o chiusa (C).

All’inizio tutte le maniglie sono messe in posizione C.

Il presidente, amante dei giochi matematici, dà al secondino l’ordine seguente.

Inizia dalla cella 1 e, una dopo l’altra, gira tutte le maniglie.

Poi ritorna all’inizio e gira, partendo dalla 2, le maniglie di tutte le celle di numero pari.

Di nuovo torna all’inizio e, partendo dalla cella numero 3, gira tutte le maniglie delle celle dal numero divisibile per 3.

Poi fa la stessa cosa con le celle divisibili per 4, poi con quelle divisibili per 5, e così via fin che l’ultima fatica sarà solo quella di girare la maniglia della cella 100 partendo dalla cella numero 100.

Quali celle risulteranno aperte alla fine, permettendo così al carcerato che le occupa di uscire di prigione?

L'amnistia: traccia di soluzione

Rimarranno aperte alla fine le celle la cui maniglia viene azionata un numero **dispari** di volte, per esempio:

1 volta, **C**➔A, 3 volte **C**➔A➔C➔A , ecc.

La maniglia di una cella numero n viene azionata quando il secondino passa per la k-esima volta, con k divisore di n.
Per esempio, la maniglia della cella 6 viene azionata ai passaggi 1, 6, 2, 3 e basta.

Verrà liberato il prigioniero della cella numero q solo se q ha un **numero dispari di divisori**.

I divisori di un numero q si possono appaiare: $q = d_1 \times d_2$

Quando saranno in numero dispari?

Quando ci sarà una coppia $(d_1 ; d_1)$,
cioè quando q è un **numero quadrato**.

Grazie e … buon problema!

Indirizzi utili:

gianar76@gmail.com

www.dm.unibo.it/rsddm

www.smasi.ch