I nostri amici numeri

Tre quaderni di apprendimento per la scuola primaria: prima/seconda - terza - quarta/quinta

Generalità e quadro teorico

I quaderni si presentano come una concreta possibilità di rinnovare l'insegnamento della matematica nella scuola primaria. Sono basati sui risultati della ricerca in didattica della matematica. Gli autori sono ben coscienti che ogni alunno apprende a modo suo e che ogni insegnante dà una propria interpretazione alla pratica didattica. Ne consegue che l'applicazione in classe di una sola metodologia di insegnamento risulta di per sé fallimentare (D'Amore e Fandiño Pinilla, 2014). Coerentemente con questa affermazione e tenendo conto dei limiti imposti dal materiale cartaceo, gli autori hanno cercato di offrire attività variate anche nell'impostazione didattica: in modo individualizzato o socializzato, con eventuali estensioni su fogli a parte, impiegando materiali di manipolazione e cercando altri spunti nella realtà.

La struttura generale dei quaderni è ispirata alla nota teoria delle situazioni di Brousseau (1986, 2004). Ogni contenuto è introdotto mediante una serie di *situazioni* ideate allo scopo di permettere agli alunni di avvicinarsi in modo ludico ed euristico all'*apprendimento dei concetti*. In questa fase di approccio, la forma didattica consigliata agli insegnanti è quella del lavoro per piccoli gruppi, all'interno dei quali gli alunni possano liberare le proprie capacità intuitive e creative (*apprendimento strategico*) ma, come detto, è possibile adottare anche modalità individualizzate o altre forme di apprendimento socializzato.

Questa prima fase può rilanciare momenti di *messa in comune* nei quali ogni alunno abbia la possibilità di dare forma e sostanza al proprio apprendimento grezzo, con l'aiuto dell'insegnante e interagendo con i compagni, divertendosi con allettanti problemi espressamente concepiti per portarlo a un primo livello di competenza. L'insegnante può condurre per esempio un dialogo con l'intera classe, durante il quale gli allievi esprimono ciò che hanno capito e quel che rimane ancora da chiarire, oppure può invitare gli alunni stessi a esporre ciò che hanno elaborato nei loro gruppi di lavoro (*apprendimento comunicativo*). Altra possibilità potrebbe consistere nell'organizzare un'attività di insegnamento *peer to peer* (Arrigo, Maurizi, Minazzi, 2004) nella quale una parte degli alunni giocano il ruolo di insegnanti e gli altri di apprendenti. L'acquisizione grezza e personale assume a poco a poco una veste condivisa dalla classe, perdendo determinati elementi varianti e soggettivi e rinforzando quelli invarianti che concorrono alla formazione del concetto. Nei quaderni si trovano, appunto, più situazioni costruite attorno agli stessi concetti.

L'insegnante curerà anche l'introduzione corretta di termini e simboli, scegliendo solo quelli che ritiene irrinunciabili nel seguito dell'attività didattica: l'apprendimento a poco a poco si istituzionalizza e assume una veste più vicina al linguaggio della matematica. L'apprendimento in questi momenti avviene per lo più nell'*area di sviluppo prossimale*: ciò significa, come ci insegna Vygotskij (1978), che l'allievo ha ancora bisogno dell'insegnante, il quale interviene nei momenti di stallo o quando nota errori, fraintendimenti o direzioni di lavoro che non portano a nulla. L'insegnante, interagendo con gli alunni, deve anche essere attento alla eventuale formazione di *misconcezioni* che, se prese prima che si cristallizzino nella mente degli alunni, non solo possono essere corrette, ma addirittura rappresentare un punto di partenza per nuovi apprendimenti (D'Amore,1999 e Sbaragli, 2005). Per l'insegnante la difficoltà maggiore consiste nell'accorgersi di queste anomalie presenti nella mente dell'alunno: tanto più riuscirà ad abituare l'allievo a esprimere liberamente le proprie idee, quanto più facile sarà l'identificazione delle stesse. Una delle caratteristiche dei quaderni consiste proprio nel dare la possibilità all'alunno di esprimere idee personali, di operare scelte e di giustificare il proprio operato permettendo all'insegnante di verificarne la correttezza. Esistono altri modi che permettono di farsi un'idea della correttezza e della robustezza dell'apprendimento (Arrigo, 2007): per esempio, il colloquio clinico, i TEP's o produzioni testuali degli alunni su un determinato contenuto matematico appreso (Maier, 2000), i brani da completare e altro ancora. Non è certamente facile scrutare la mente dell'alunno, ma ciò non deve rappresentare un alibi per desistere. Occorre rendersi conto che determinati insuccessi nell'apprendimento possono essere superati a condizione di scoprire la natura dell'errore o dell'ostacolo (Zan, 2007).

Altro tema importante per l'insegnante è quello relativo all'impiego dei diversi registri semiotici. Si sa che, per raggiungere la graduale e consapevole costruzione cognitiva di un oggetto matematico, è importante che l'alunno passi attraverso *varie rappresentazioni semiotiche* (D'Amore, 2003 e Duval, 1993, 1996). Dove è parso possibile e conveniente, nei quaderni si è cercato di mettere l'alunno nella necessità di gestire trasformazioni semiotiche proposte (*conversioni* da un registro a un altro oppure *trattamenti* all'interno di un determinato registro) e anche di spingere lo stesso a operarne qualcuna allo scopo di meglio capire un concetto o di semplificare determinati iter risolutivi.

Nei quaderni, dopo un'attività di apprendimento di una certa consistenza, si propone una fase esercitativa denominata *Palestra matematica* nella quale soprattutto gli alunni che non sono ancora giunti a un livello di apprendimento soddisfacente possono, con l'eventuale aiuto dell'insegnante, rielaborare la materia e assestare l'apprendimento. La palestra matematica propone soprattutto esercizi mirati al perfezionamento di determinati obiettivi disciplinari, centrati per lo più, ma non esclusivamente, sull'*apprendimento algoritmico*.

Subito dopo l'alunno trova un *Test di autovalutazione*, composto di una serie di item a scelta multipla che portano a scoprire una frase misteriosa che l'allievo trova rispondendo correttamente ai diversi quesiti proposti. Il test serve soprattutto per verificare aspetti dell'apprendimento algoritmico e, in misura minore, di quelli concettuali.

Particolare attenzione è stata posta all'educazione al *problem solving*, le cui proposte non sono collocate in una sezione dedicata, ma sono disseminate in tutta l'opera. Con questa scelta si vorrebbe dare agli insegnanti il messaggio che la matematica si impara affrontando situazioni sempre diverse e che quindi ogni atto di apprendimento deve nascere dalla necessità di risolvere un problema, di superare un ostacolo cognitivo (Brousseau, 1976-1983) o di soddisfare determinate curiosità.

Infine ribadiamo che i quaderni non sono schede di lavoro esaustive, da somministrare una dopo l'altra fino a esaurimento, ma proposte pronte per essere elaborate nelle classi: l'insegnante potrà usarle seguendo un proprio itinerario e completarle di sua iniziativa, a seconda delle situazioni che si verificano nella propria classe.

Aspetto disciplinare: il calcolo ragionato

Il calcolo ragionato è fondamentalmente calcolo mentale che si avvale anche del supporto carta-penna. Le sue attività si estendono su tutto l'arco degli apprendimenti, secondo la classificazione proposta da Fandiño Pinilla (2008): algoritmico, concettuale, strategico, comunicativo e tocca anche in modo significativo la gestione delle trasformazioni semiotiche. Possiamo quindi affermare senza ombra di dubbio che l'apprendimento del calcolo ragionato è completo e inoltre, come si vedrà, costituisce un'ottima preparazione all'apprendimento dell'algebra elementare.

Dal punto di vista dell'allievo, la pratica del calcolo ragionato si basa sulla conoscenza ben fondata delle quattro operazioni aritmetiche, in particolare sull'aspetto operativo delle proprietà (associativa, commutativa e distributiva), che però non vengono né presentate separatamente né necessariamente conosciute con la terminologia matematica. Così, per esempio, per calcolare una somma di più addendi, l'allievo impara a iniziare dall'addendo che desidera e proseguire secondo un ordine a lui conveniente, facendo solo attenzione di considerare ogni addendo una sola volta, il che, in matematica, significa applicare le proprietà associativa e commutativa dell'addizione; per esempio, per calcolare 26+19+14+ 21 può procedere così: (26+14)+(19+21)= 40+40= 80. Dovendo invece calcolare 16x7 può scomporre il 16 in 10+6 e calcolare 10x7+6x7, oppure scomporre il 7 in 10–3 oppure ancora in il 7 in 5+2 ecc. (uso naturale della proprietà distributiva). Di fronte alla divisione 96:6 può scomporre 96 in 60+36 e calcolare 60:6+36:6 o, se preferisce, dividere 96 prima per 3 e poi per 2 o altro ancora.

Si sviluppa in questo modo l'abitudine ad analizzare ogni calcolo, prima di procedere. Ciò significa sviluppare le doti relative all'analisi, all'intuizione e all'invenzione, così importanti nel fare matematica. A volte può anche essere conveniente operare un trattamento nel registro numerico; per esempio, moltiplicare per 0,25 è come dividere per 4, che a sua volta è come dividere successivamente per 2 e per 2. E via di seguito.

L'allievo viene così aiutato a vedere la matematica, non come disciplina rigida che occorre soprattutto memorizzare, ma come un mondo stimolante nel quale muoversi in modo sempre più autonomo, incontrare oggetti che, compatibilmente alle sue capacità, a poco a poco riesce a far propri e con essi creare percorsi risolutivi personali o intuire nuovi concetti.

Un valore aggiunto veicolato dal calcolo ragionato consiste nell'apprendimento della scrittura matematica, cioè nell'esecuzione dei calcoli "in riga" (espressione opposta alla nota "in colonna"), che comprende l'uso delle parentesi e il rispetto della gerarchia delle operazioni aritmetiche, cose che l'alunno impara a poco a poco (dalla prima alla quinta) in modo naturale, apprezzando soprattutto le loro caratteristiche di comodità e di sintesi.

Nei quaderni si dà particolare risalto al *problem solving*, sia in modo esplicito proponendo problemi mirati, sia in modo implicito, come accennato sopra, nell'affrontare questioni numeriche.

Per riuscire a operare con i numeri è necessario conoscere bene il nostro sistema di numerazione (posizionale, a base dieci). I quaderni introducono già in prima l'uso dei simboli *h*, *da*, *u* che vengono poi completati nelle classi successive con l'intera gamma (scolastica) *(M), k*, *h*, *da*, *u*, *d*, *c*, *m*. Oltre a essere utili nello studio delle grandezze, i simboli permettono di eseguire mentalmente anche calcoli di una certa complessità.

Qualche esempio:

257 + 78 = 2 h + 5 da + 7 u + 7 da + 8 u = 2 h + 12 da + 15 u = 2 h + 1 h + 2 da + 1 da + 5 u =
= 3 h + 3 da + 5 u = 335

4,07 x 0,8 = 407 c x 8 d = (407 x 8) m = (3200 + 56) m = 3256 m = 3,256

Nel calcolo ragionato si può ricorrere a schematizzazioni che, a differenza del calcolo in colonna, risultano più semplici e mostrano più chiaramente la struttura matematica. Qualche esempio:

234 – 87 = ?

$$\boxed{87} \xrightarrow{+3} \boxed{90} \xrightarrow{+10} \boxed{100} \xrightarrow{+100} \boxed{200} \xrightarrow{+34} \boxed{234}$$

Conclusione: 234 – 87 = 3 + 10 + 100 + 34 = 113 + 34 = 147 (senza l'ostacolo dei "prestiti")

Oppure: (234 – 84) – 3 = 150 – 3 = 147 (o in altri modi ancora).

918 : 34 = ?

$$\boxed{34} \xrightarrow{\times 10} \boxed{340} \xrightarrow{\times 10 \;\oplus} \boxed{680} \xrightarrow{\times 5 \;\oplus} \boxed{850} \xrightarrow{\times 2 \;\oplus} \boxed{918}$$

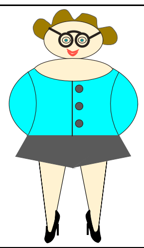
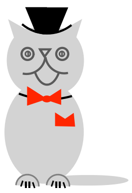
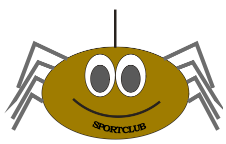
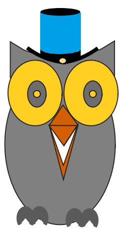
Conclusione: 918 : 34 = 10 + 10 + 5 + 2 = 27 (più semplice della divisione in colonna)

<table>
<tr><td>Nella moltiplicazione 407 x 8 si può anche procedere così:</td><td>Esempio di moltiplicazione più complessa:
327 x 46 = ?</td></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>8</td></tr>
<tr><td>400</td><td>3200</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>7</td><td>56</td></tr>
</table>
</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>40</td><td>6</td></tr>
<tr><td>300</td><td>12000</td><td>1800</td></tr>
<tr><td>20</td><td>800</td><td>120</td></tr>
<tr><td>7</td><td>280</td><td>42</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Quindi: 407 x 8 = 3200 + 56 = 3256</td><td>Quindi: 327 x 46 = 12'000 + 1800 + 800 + 120 + + 280 + 42 = 12'000 + 2600 + 400 + 42 = = 12'000 + 3000 + 42 = 15’042</td></tr>
</table>

Si può anche operare in altro modo, come si vede nel volume dedicato alle classi quarta e quinta. Gli alunni stessi sono stimolati a variare le tecniche di calcolo, a crearne di personali.

L’ambiente di apprendimento

I quaderni si presentano all’alunno come serie di avventure che coinvolgono quattro personaggi (un quinto si aggregherà nel quaderno di quarta/quinta). L’intenzione è di riproporre in grandi linee le figure che sono presenti in ogni scuola e dare così la possibilità agli alunni di immedesimarsi di volta in volta con l’uno o con l’altro.

	*Genoveffa, la scienziata*. È ricercatrice in un grande laboratorio. Pone domande, propone attività, dà le informazioni necessarie, stimola ed esprime giudizi.
	*Arturo, il gatto*. È l’immagine dell’allievo simpaticamente critico nei confronti delle attività scolastiche.
	*Ercolino, il ragno*. Ha la passione dei numeri, impara subito, è dotato di buone capacità intuitive, dà consigli ai suoi amici, anticipa determinati apprendimenti.
	*Filiberto, il gufo*. È innamorato della geometria, soffre un po’ quando si tratta di concentrarsi esclusivamente su questioni numeriche, apprezza il ricorso a immagini e schemi, si rifà quando i calcoli concernono questioni geometriche.

Bibliografia

Arrigo G., Maurizi L. e Minazzi T. (2004). Chi spiega impara a mettere i pensieri bene: la comunicazione intenzionale in matematica. *La Matematica e la sua Didattica, 4*. Bologna: Pitagora

Arrigo G. (2007). Robustezza degli apprendimenti. Un contributo alla valutazione della competenza. *La Matematica e la sua Didattica, 4*, 471-499
Una sintesi del rapporto di ricerca si trova sul BDM 56, maggio 2008 e può essere scaricata dal sito https://www4.ti.ch/decs/ds/cerdd/scuolalab/bollettino-dei-docenti-di-matematica/archivio/

Brousseau G. (1976-1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*,4.2, 165-198

Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*,7, 2, 33-115

Brousseau G. (2004). Una modellizzazione dell'insegnamento della matematica. *Bollettino dei docenti di matematica, 49,* 11-32. Bellinzona: UIM-CDC. Scaricabile dal sito: https://www4.ti.ch/decs/ds/cerdd/scuolalab/bollettino-dei-docenti-di-matematica/archivio/

D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora

D'Amore B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora

D'Amore B. e Fandiño Pinilla M. I. (2014). Illusioni, panacee, miti nell'insegnamento-apprendimento della Matematica. *Difficoltà in Matematica*, 11(1), 89-109

Duval R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. ULP, IREM Strasbourg 5, 37-65

Duval R. (1996). Trasformazioni di rappresentazioni semiotiche e prassi di pensiero in matematica. *La Matematica e la sua Didattica*, 20(4), 585-619

Fandiño Pinilla M. I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica*. Trento: Erickson

Sbaragli S. (2005). Misconcezioni "evitabili" e misconcezioni "inevitabili". *La Matematica e la sua Didattica, 1*, 57-71

Vygotskij L. S. (1980). *Il processo cognitivo*. Torino: Boringhieri

Zan R. (2007). *Difficoltà in matematica: osservare, interpretare, intervenire*. Milano: Springer

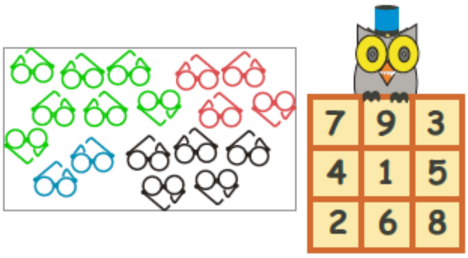
Qualche flash dal quaderno di prima e seconda

Questo quaderno porta il sottotitolo “Conosciamo i nostri amici numeri. Per fare amicizia con il meraviglioso mondo dei numeri”. Al di là dei contenuti disciplinari, il suo scopo principale è proprio di creare una profonda empatia tra alunno e mondo dei numeri.
Si inizia con i conteggi, i raggruppamenti e le scomposizioni additive, che portano a una prima conoscenza del nostro sistema di numerazione con l’introduzione dei simboli *h*, *da*, *u*. Si prosegue poi con i primi calcoli (addizione e sottrazione) e con l’introduzione della moltiplicazione.

OCCHIALI DA GUFO

AL GUFO FILIBERTO PIACCIONO MOLTO GLI OCCHIALI, LI COLLEZIONA E OGNI TANTO LI RIORDINA.

AIUTA FILIBERTO A CONTARE GLI OCCHIALI DELLO STESSO COLORE E COLLEGALI AL CASSETTO ADATTO.



AIUTA FILIBERTO A INSERIRE I NUMERI DA 1 A 9 NELLA RETTA DEI NUMERI
C'È POSTO ANCHE PER LO ZERO? E PER IL DIECI?

GIOCHIAMO CONTANDO

COMPLETA E SPIEGA OGNI VOLTA PERCHÉ HAI FATTO COSÌ.

7	8	9	10		
29	31	33			
1		7			16
	16	20			32
	6	9	12		

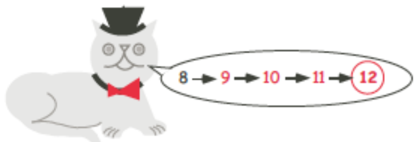
22	21	20	19		
25	20	15	10		
60	50	40	30		
	47	37		17	
15	9	7	4		

BELLE ADDIZIONI

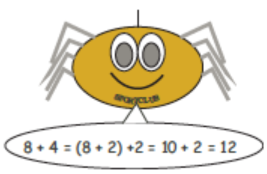
GATTO ARTURO STA RACCOGLIENDO LE FIGURINE DEI CALCIATORI. NE AVEVA 8 E IL SUO AMICO GLIENE DÀ 4. QUANTE FIGURINE HA ORA?

....

GATTO ARTURO HA FATTO COSÌ:



MA GUARDA UN PO' COME HA FATTO ERCOLINO!



ORA TOCCA A TE! PROVA AD ESEGUIRE LE SEGUENTI ADDIZIONI. PUOI FARE COME ARTURO, OPPURE COME ERCOLINO O ANCORA COME VUOI TU!

7 + 6 = ...

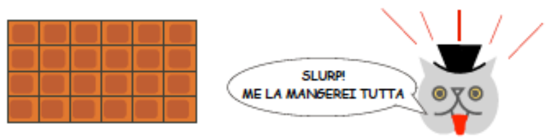
9 + 5 = ...

6 + 8 = ...

3 + 9 = ...

CALCOLIAMO

QUANTI QUADRETTI NELLA TAVOLETTA DI CIOCCOLATO?



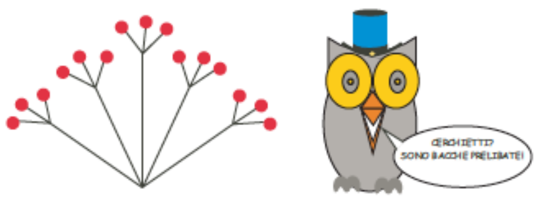
SCRIVI IL CALCOLO USANDO SOLO IL +

....

SCRIVI IL CALCOLO USANDO SOLO IL ×

....

QUANTI CERCHIETTI ROSSI?



SCRIVI IL CALCOLO USANDO SOLO IL +

....

SCRIVI IL CALCOLO USANDO SOLO IL ×

....

PER INIZIARE.

3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = ... SCRIVILO CON IL PER .... = ...

2 x 7 = ... SCRIVILO CON IL PIÙ .... = ...

CONCERTO A QUATTRO MANI PER PIANOFORTE: QUANTE DITA?

....

UN MAZZETTO DI 8 TRIFOGLI: QUANTE FOGLIE?

....

IN OGNI CONFEZIONE VI SONO 6 GRISSINI: QUANTI IN TUTTO?

....

NEL NUOVO PARCHEGGIO VI SONO 5 FILE DA 4 POSTI, 3 FILE DA 10 POSTI E 2 FILE DA 9 POSTI: QUANTI POSTI IN TUTTO?

....

MARCO, LORELLA E MAX HANNO PORTATO 5 MELE CIASCUNO. GIGI, SIMONE, CAROL E MARINA HANNO PORTATO 3 MELE CIASCUNO. MAMMA, PAPÀ, ZIO, NONNO E NONNA HANNO PORTATO 6 MELE CIASCUNO. QUANTE MELE IN TUTTO?

....

(3 X 5) + (5 X 3) = ...

(1 X 2) + (2 X 3) + (3 X 4) + (4 X 5) = ...

(4 X 10) - (2 X 3 X 4) = ...

(1 X 10) + (2 X 10) + (3 X 10) - (2 X 2 X 2 X 5) =

= ....

2 + (2 X 2) + (2 X 2 X 2) + (2 X 2 X 2 X 2) =

= ....

SCEGLI LA RISPOSTA CHE TI PARE GIUSTA E COLORA LA SUA CASELLA.

6 + 6 + 6 = ?

6 x 3	6 x 6	6 + 6	666
IL	LU	SIO	NE

24 È IL RISULTATO DI

2 X 4	4 X 2	4 X 4	6 X 4
PRI	MO	PRE	MIO

DUE SETTIMANE, QUANTI GIORNI?

27	14	9	15
DUE	A	IO	LE

8 + 8 + 8 + 8 = ?

8 x 4	8 x 8	88	8888
MI	NE	STRI	NA

(3 x 10) + (2 x 5) + (5 x 2) = ?

20	40	60	50
O	RI	NO	CO

(2 x 7) + (4 x 4) - (5 x 6) = ?

10	0	5	60
MO	NE	TI	NA

(2 x 5) + (5 x 4) - (3 x 4) = ?

10	18	0	42
CO	PER	TO	NE

RIPORTA ORDINATAMENTE NEI RETTANGOLINI SEGUENTI LE SILLABE CORRISPONDENTI ALLE RISPOSTE CORRETTE. SE SARAI BRAVO, OTTERRAI UNA BATTUTA DEL GATTO ARTURO.

Qualche flash dal quaderno di terza

Questo quaderno porta il sottotitolo "Divertiamoci con i nostri amici numeri. Per calcolare con allegria, competenza e creatività".
Lo scopo principale è sfruttare l'empatia creata negli anni precedenti per mirare a primi livelli di competenza. L'alunno è messo a confronto con innumerevoli situazioni che lo spingono ad agire personalmente valutando di volta in volta le diverse possibilità che gli si presentano per poter giungere a soluzioni corrette, in piena coscienza.
Si inizia approfondendo e ampliando le conoscenze sul nostro sistema di numerazione, si riprende l'apprendimento in ambito additivo e moltiplicativo, affrontando situazioni varie, che spingono l'alunno a raffinare le proprie capacità strategiche e gli aspetti concettuali.
Si perfeziona anche l'uso nei calcoli dei simboli del sistema internazionale (*M, k, h, da, u*).
L'apprendimento delle tabelline è proposto in modo costruttivo.
Sono suggeriti più modi di eseguire le operazioni (diversi aspetti interpretativi e vari registri semiotici) e l'alunno è invitato a scegliere, di volta in volta, come procedere a seconda delle situazioni e anche, perché no, dei propri gusti.
Si termina con l'introduzione della divisione, vista come operazione inversa della moltiplicazione. Come già avvenuto per addizione e sottrazione, anche queste due operazioni sono presentate insieme e sono poi seguite da una serie di problemini che hanno lo scopo di portare l'allievo a distinguere bene i casi moltiplicativi da quelli divisivi.
Le attività proposte sui quaderni possono essere estese ad altre che l'insegnante può realizzare e proporre anche in modo differenziato.
È pure consigliato il ricorso a materiali di manipolazione, a osservazione e interpretazione di situazioni della vita quotidiana.

Addizione

Un esempio:

14 + 23 = 10 + 4 + 20 + 3 = (10 + 20) + (4 + 3) = 30 + 7 = 37
14 + 23 = 1 da + 4 u + 2 da + 3 u = 3 da + 7 u = 37

Un esempio più difficile:

1530 + 27 = 1000 + 500 + 30 + 27 = (1000 + 500) + (30 + 27) = 1500 + 57 = 1557
1530 + 27 = 1 k + 5 h + 3 da + 2 da + 7 u = 1 k + 5 h + 5 da + 7 u = 1557

Ora tocca a te. Decidi tu se e quando imitare Ercolino!

160 + 25 = ...

120 + 85 = ...

160 + 180 = ...

72 + 64 = ...

44 + 260 = ...

999 + 18 = ...

23 + 190 = ...

330 + 1700 = ...

(...)

Sottrazione

Proviamo con la sottrazione.

139 – 25 = (139 – 20) – 5 = 119 – 5 = 114 1 h + 3 da + 9 u – 2 da – 5 u = 1 h + 1 da + 4 u = 114	
127 – 34 = (127 – 30) – 4 = 97 – 4 = 93 (1 h + 2 da + 7 u) – 3 da – 4 u = 12 da – 3 da + 3 u = = 9 da + 3 u = 93	

Prova tu, come preferisci, con o senza usare i simboli:

78 – 57 =
54 – 29 =
170 – 50 =
(...)

Altro modo di eseguire una sottrazione:

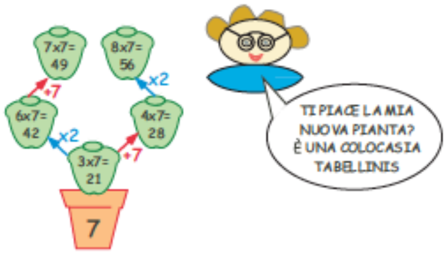
127 – 34 = ? $\boxed{34} \xrightarrow{+6} \boxed{40} \xrightarrow{+60} \boxed{100} \xrightarrow{+20} \boxed{120} \xrightarrow{+7} \boxed{127}$ Quindi: 127 – 34 = 6 + 60 + 20 + 7 = 93	

Ecco alcune sottrazioni che puoi eseguire... come ti pare.

76 – 60 =	1000 – 995 =
478 – 157 =	505 – 220 =
75 – 48 =	111 – 88 =
(...)	(...)

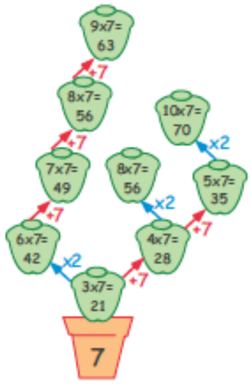
Le piante ornamentali di Genoveffa

Genoveffa ha comperato una nuova pianta da appartamento. È però una pianta speciale, utilissima per imparare le tabelline.



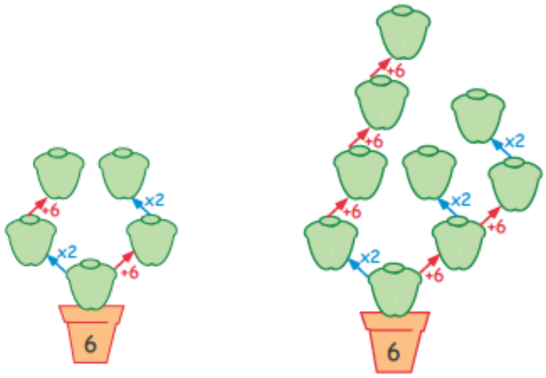
Osservala bene e scopri i legami numerici che ci sono fra le foglie.

Ercolino, che coi numeri ci sa fare, ha già capito tutto e si è permesso di farla crescere ancora. Ecco il risultato.

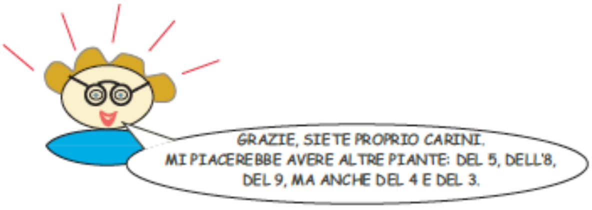


Genoveffa è felice del risultato e vorrebbe altre piante.

Per cominciare vorrebbe una pianta del 6.
Prova tu a completarla. Se te la senti, potresti anche farla crescere come quella di Ercolino.



Una ciliegia tira l'altra! Genoveffa vorrebbe arricchire la sua collezione di colocasie tabellinis…



Se decidi di accontentare Genoveffa, disegna le piante su un foglio a parte. Puoi anche scegliere altre forme.
I disegni più belli regalali a Genoveffa, oppure esponili alla parete della tua aula.

Altri alberi

Arturo, il nostro gatto birichino, si diverte a salire sui rami di un albero molto speciale, che dice di essere suo. Ha anche tentato di disegnarlo, ma poi si è stufato. Ecco il suo disegno incompleto.

Ogni ramo dovrebbe terminare con 4 rametti. Completa il disegno. Quanti rametti vi sono in cima all'albero?

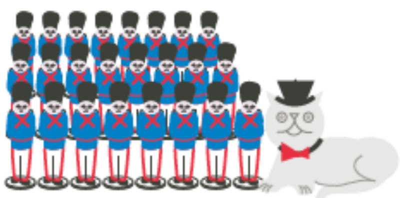
……………………………………

Se volessi costruire l'albero con dei legnetti, quanti te ne dovresti procurare?

……………………………………

Gli allineamenti di gatto Arturo

Arturo si diverte a giocare con i soldatini di piombo del nonno. Li dispone in file ordinate e gli piace osservarli. Ecco come ha allineato alcuni soldatini:

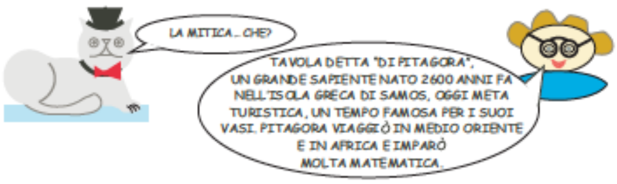


Quanti sono in tutto i soldatini? ……………………………………………………

Ora vorrebbe disporli a 6 a 6. Quante file dovrà fare? ……………………………

È possibile allinearli a 7 a 7? ……………

La mitica Tavola Pitagorica



Eccola!

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

La tavola può aiutarti a ricordare le cosiddette tabelline, cioè i risultati delle moltiplicazioni entro il 100, molto importanti da memorizzare se si vuole diventare bravi calcolatori. Basta incrociare righe con colonne. Buon divertimento!

Finalmente… la divisione (il "diviso")

Così dice Genoveffa

Scrivi i numeri mancanti:

3 x 7 = ...	.... x 7 = 21	3 x .... = 21
Fatto? Ora, tu conosci il risultato e uno dei fattori. Come puoi trovare l'altro?	21 : 7 = 3 si legge: "21 diviso 7 = 3"	21 : 3 = ... si legge: "21 diviso 3 = 7"

5 x 4 = ...	20 : 4 = ...	20 : 5 = ...
6 x 8 = ...	.... : .... = ...	.... : .... = ...
9 x 3 = ...	.... : .... = ...	.... : .... = ...
7 x 5 = ...	.... : .... = ...	.... : .... = ...
4 x 9 = ...	.... : .... = ...	.... : .... = ...
8 x 7 = ...	.... : .... = ...	.... : .... = ...
8 x 9 = ...	.... : .... = ...	.... : .... = ...

Moltiplica o dividi?

64 palloncini devono essere distribuiti equamente fra 8 bambini.
Quanti palloncini riceve ogni bambino? Scrivi il calcolo e trova il risultato.

....

Quante squadre di 5 giocatori si possono formare con una classe di 25 allievi?

....

Paolo ha 20 macchinine. Le vuole ripartire equamente in gruppi più numerosi di 1.
Quante possibilità ha e quanti gruppi può formare?

....

Chiara possiede 30 buste di plastica e in ciascuna vuole mettere 5 fogli bianchi.
Quanti fogli deve procurarsi?

....

In una scacchiera classica usata dagli scacchisti, quanti quadretti neri vi sono?

....

Una seggiovia ha sedili di 5 posti. Arriva una comitiva di 40 persone che salgono subito occupando completamente ogni sedile.
Quanti sedili occupa l'intera comitiva?

....

Un album è composto di 30 fogli.

Quante pagine ha?

....

Marina vuole incollarvi 27 fotografie mettendone 3 per pagina.
Quante pagine rimarranno vuote?

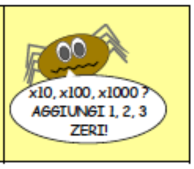
....

Oltre la Tavola Pitagorica

Un po' di tecnica

Non sempre si incontrano moltiplicazioni della Tavola Pitagorica. Perciò è necessario conoscere qualche modo per cavarsela sempre. Vediamo insieme i più usati.

7 x 10 = 70
70 x 10 = 700
10 x 10 x 10 = 1000
7 x 800 = 7 x 8 x 100 = 56 x 100 = 5600
90 x 800 = 9 x 10 x 8 x 100 = 72 x 1000 = 72'000



15 x 8 = (10 + 5) x 8 = 10 x 8 + 5 x 8 = 80 + 40 = 120
6 x 37 = 6 x (30 + 7) = 6 x 30 + 6 x 7 = 180 + 42 = 222
29 x 7 = (30 - 1) x 7 = 30 x 7 - 1 x 7 = 210 - 7 = 203
5 x 99 = 5 x (100 - 1) = 5 x 100 - 5 x 1 = 500 - 5 = 495

X	8
30	240
5	40

35 X 8 = 240 + 40 = 280

A te! Esegui liberamente le seguenti moltiplicazioni. Riesci a usare tutti e tre i modi?

40 x 7 =	30 x 700 =
56 x 4 =	48 x 6 =
7 x 99 =	78 x 8 =
93 x 9 =	23 x 45 =

Anche con la divisione è possibile spingersi oltre la Tavola Pitagorica.
Vediamo come.

320 : 40 = 32 : 4 = 8
560 : 7 = (56 : 7) x 10 = 8 x 10 = 80
60 : 4 = (60 : 2) : 2 = 30 : 2 = 15
600 : 15 = (600 : 3) : 5 = 200 : 5 = 40

54 : 3 = (30 + 24) : 3 = (30 : 3) + (24 : 3) = 10 + 8 = 18
117 : 9 = (90 + 27) : 9 = (90 : 9) + (27: 9) = 10 + 3 = 13
192 : 8 = (80 + 80 + 32) : 8 = (80 : 8) + (80 : 8) + (32 : 8) =
= 10 + 10 + 4 = 24

Prova tu, seguendo i consigli di Ercolino:

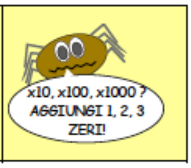
208 : 4 =
144 : 8 =
650 : 5 =
650 : 50 =
720 : 9 =
630 : 7 =
540 : 60 =
96 : 6 =
75 : 5 =

Oltre la Tavola Pitagorica

Un po' di tecnica

Non sempre si incontrano moltiplicazioni della Tavola Pitagorica. Perciò è necessario conoscere qualche modo per cavarsela sempre. Vediamo insieme i più usati.

7 x 10 = 70
70 x 10 = 700
10 x 10 x 10 = 1000
7 x 800 = 7 x 8 x 100 = 56 x 100 = 5600
90 x 800 = 9 x 10 x 8 x 100 = 72 x 1000 = 72'000



15 x 8 = (10 + 5) x 8 = 10 x 8 + 5 x 8 = 80 + 40 = 120
6 x 37 = 6 x (30 + 7) = 6 x 30 + 6 x 7 = 180 + 42 = 222
29 x 7 = (30 - 1) x 7 = 30 x 7 - 1 x 7 = 210 - 7 = 203
5 x 99 = 5 x (100 - 1) = 5 x 100 - 5 x 1 = 500 - 5 = 495

X	8
30	240
5	40

35 X 8 = 240 + 40 = 280

A te! Esegui liberamente le seguenti moltiplicazioni. Riesci a usare tutti e tre i modi?

40 x 7 =	30 x 700 =
56 x 4 =	48 x 6 =
7 x 99 =	78 x 8 =
93 x 9 =	23 x 45 =

Anche con la divisione è possibile spingersi oltre la Tavola Pitagorica. Vediamo come.

320 : 40 = 32 : 4 = 8
560 : 7 = (56 : 7) x 10 = 8 x 10 = 80
60 : 4 = (60 : 2) : 2 = 30 : 2 = 15
600 : 15 = (600 : 3) : 5 = 200 : 5 = 40

54 : 3 = (30 + 24) : 3 = (30 : 3) + (24 : 3) = 10 + 8 = 18
117 : 9 = (90 + 27) : 9 = (90 : 9) + (27: 9) = 10 + 3 = 13
192 : 8 = (80 + 80 + 32) : 8 = (80 : 8) + (80 : 8) + (32 : 8) = = 10 + 10 + 4 = 24

Prova tu, seguendo i consigli di Ercolino:

208 : 4 =
144 : 8 =
650 : 5 =
650 : 50 =
720 : 9 =
630 : 7 =
540 : 60 =
96 : 6 =
75 : 5 =

Problemini stimolanti

Miscellanea

Un coltivatore di frutti di bosco ha ottenuto 400 decilitri di sciroppo di lamponi.
Per la sua famiglia ne tiene 40 decilitri.
Il resto lo mette in bottigliette da 3 decilitri.
Quante bottigliette dovrà usare?

....

Le bottigliette piene le distribuisce equamente a 4 negozi della zona.
Quante bottigliette consegnerà a ogni negozio?

....

480 casse vanno messe in contenitori da 80 casse ciascuno.
Quanti contenitori occorrono?

....

Gli 8 stabilimenti di un'industria occupano ciascuno 50 operai. Per Natale si decide di distribuire equamente, come premio, la somma di 80'000 euro.
Quanti euro riceve ogni operaio?

....

720 minuti, quante ore sono?

....

In contabilità, ogni mese ha 30 giorni e ogni anno 360 giorni.

Quanti giorni contano 3 mesi contabili?

....

Quanti mesi contabili fanno 270 giorni?

....

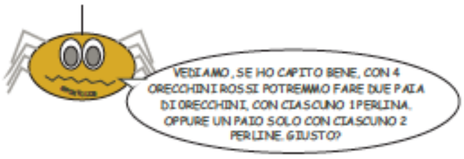
Quanti anni contabili fanno 276 mesi?

....

Un regalo per Genoveffa

Arturo, Filiberto ed Ercolino vogliono realizzare degli orecchini per il compleanno di Genoveffa. Hanno 4 perline rosse, 12 perline verdi e 48 perline gialle.
Due orecchini che formano un paio devono avere lo stesso numero di perline e lo stesso colore.

Quali possibilità hanno di confezionare le paia di orecchini?

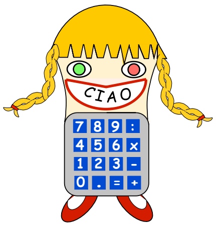


Per cercare tutte le possibilità, ti puoi servire della tabella che è da completare:

COLORE	NR. PERLE	NR. PERLE PER ORECCHINO	NR. PAIA ORECCHINI
ROSSO	4	1	2
		2	1
VERDE	12	1	
		2	
		3	
		6	
GIALLO	48		

Qualche flash dal quaderno di quarta e quinta

Questo quaderno porta il sottotitolo “La nostra amica matematica. Per vivere situazioni matematiche con serenità, competenza e fantasia”.
Ai personaggi già conosciuti (Genoveffa la scienziata, Arturo il gatto, Ercolino il ragno e Filiberto il gufo) si aggiunge Bice la calcolatrice. Sì, perché il calcolo ragionato, oltre che costituire un’importante attività formativa, serve per eseguire calcoli di ragionevole difficoltà. Di fronte ad altri calcoli, che intervengono sicuramente nei lavori di queste classi, si fa capo alla calcolatrice. Ma attenzione, Bice è irremovibile: aiuta solo se ritiene che sia opportuno, pretende una stima mentale del risultato e invita a interpretare l’*output* che appare sul suo *display* in funzione della situazione proposta dal problema risolto. Si tratta per lo più di decidere quante cifre decimali considerare e come approssimare di conseguenza. Ecco la nuova arrivata.

	*Bice, la calcolatrice.* I suoi circuiti elettronici le permettono di eseguire calcoli complicatissimi in un istante. Molto corteggiata, concede la sua assistenza solo in casi opportuni ed esige da ogni utente una stima dei risultati.

La prima parte del quaderno è dedicata all’approfondimento delle tecniche di calcolo con le quattro operazioni. La novità consiste nella presentazione di più tecniche: da quelle del calcolo ragionato a quelle più conosciute del calcolo in colonna e a un certo numero di tecniche alternative che è utile conoscere e che possono rivelarsi vincenti anche per alunni che trovano serie difficoltà nelle altre. Dal punto di vista concettuale, si porta l’allievo a meglio conoscere la divisione, i multipli e i divisori di un numero.
Conoscenze e abilità tecniche sono sviluppate dapprima esclusivamente nel campo dei numeri interi. Il passaggio ai numeri decimali è facilitato perché ogni calcolo con questi numeri può essere ricondotto a quello con gli interi. Per fare ciò l’allievo sfrutta le trasformazioni delle unità, già praticate in precedenza.
Ecco alcuni esempi:
0,12 + 3,5 = 12 c + 350 c = 362 c = 3,62
0,7 – 0,007 = 700 m – 7 m = 693 m = 0,693
0,05 x 1,2 = 5 c x 12 d = 60 m = 0,06
1,5 : 0,05 = 150 c : 5 c = 30
Le competenze sui numeri decimali vengono subito trasferite nel campo delle grandezze e misure. Chi conosce bene i simboli *(M), k, h, da, u, d, c, m* li applica senza eccessive difficoltà alle misure di lunghezza, di massa e di capacità, trasformazioni comprese.
Per esempio: *(ML), (kL), hL, daL, L, dL, cL, mL* sono il corrispettivo della sequenza precedente e il loro trattamento è esattamente come quello già incontrato con i numeri decimali:
1 hL + 15 daL + 35 L = 100 L +150 L + 35 L = 285 L
Le conoscenze dei numeri si completano con un’introduzione ai numeri relativi (interi positivi e negativi).
È a questo punto che fa capolino la nuova amica: Bice la calcolatrice. All’alunno si propongono alcuni consigli sia per usare bene la macchina sia per evitarne l’abuso. Durante l’intero quinquennio si pone l’accento sul fatto che un calcolo non eccessivamente difficile può essere eseguito in modo ragionato – ricavando soddisfazione personale e un aumento della propria autostima - e che ogni risultato ottenuto con la macchina deve essere confrontato con una stima mentale.
Si introducono anche le frazioni, nei loro diversi aspetti e si vede come la frazione può anche essere un numero (razionale), ciò che amplia la gamma dei corrispondenti registri semiotici: decimale, frazionario e percentuale.
Alle misure decimali si aggiungono quelle sessagesimali: del tempo e delle ampiezze angolari.

Dai perimetri dei poligoni si passa alla lunghezza della circonferenza e si impara a conoscere il famoso numero “pi greco”. Un numero strano per gli alunni, perché non si riesce a scriverlo (la sequenza di cifre dopo la virgola non finisce mai!); un numero che si usa solo mediante sue approssimazioni (non solo la conosciutissima e abusata 3,14 ma anche semplicemente 3 oppure 3,1 oppure ancora 3,14159265 come ci suggerisce Bice).
La conoscenza del perimetro è affiancata al concetto di area.
Tutte le conoscenze e le abilità accennate sono apprese a poco a poco praticando situazioni stimolanti, problemi curiosi ed esercitazioni che hanno lo scopo di perfezionare le tecniche basilari della matematica elementare.
Come con gli altri quaderni, anche in questo l’alunno ha la possibilità di autovalutare il proprio apprendimento sottoponendosi agli appositi test.
Ma la parte più soddisfacente è quella che tecnicamente si definisce *problem solving*, le cui attività squisitamente formative si trovano disseminate nei vari capitoli.
Il ruolo attivo dei cinque personaggi fa da cornice ai lavori e svolge il compito di rendere più piacevole l’apprendimento, arricchendo anche le interazioni fra gli alunni.

Tecnica della moltiplicazione

(…)

Con la tabella

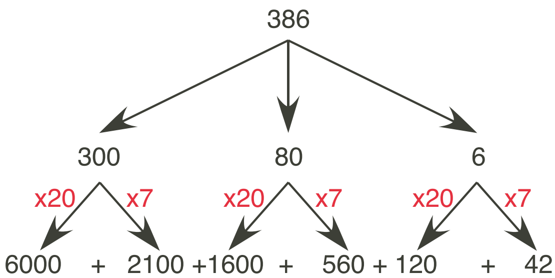
×	300	80	6
20	6000	1600	120
7	2100	560	42

Eseguiamo le moltiplicazioni nelle caselle e infine sommiamo tutti i risultati della tabella:

6000 + (2100 + 1600) + (560 + 120) + 42 = 6000 + 3700 + 680 + 42 = 9700 + 600 + 80 + 42 =
= 10'380 + 42 = 10’422

Dunque: 386 x 27 = 10’422

Con lo schema a frecce



Dunque: 386 x 27 = 9700 + 680 + 42 = 10'380 + 42 = 10’422

(…)

Indennità viaggio

La tabella riassume il numero di km percorsi da un rappresentante di una ditta, in una settimana di lavoro.

giorno	lunedì	martedì	mercoledì	giovedì	venerdì	sabato
km percorsi	247	558	179	444	98	289

Egli percepisce un'indennità di 0,65 € al km, tranne il sabato che comporta l'indennità di 0,75 € al km.

A quanto ammonta l'indennità totale che il rappresentante dovrà ricevere per questa settimana?

L'edicolante

Un edicolante esamina i ricavi giornalieri dell'ultima settimana, espressi in euro.

685,40	405,80	478,30	358,95	299,60	355,55	289,75

Quanto ha ricavato in media al giorno?

Se dovesse decidere di andare in ferie per 11 giorni, quanto ci perderebbe, secondo questa media?

Campioncino del pedale

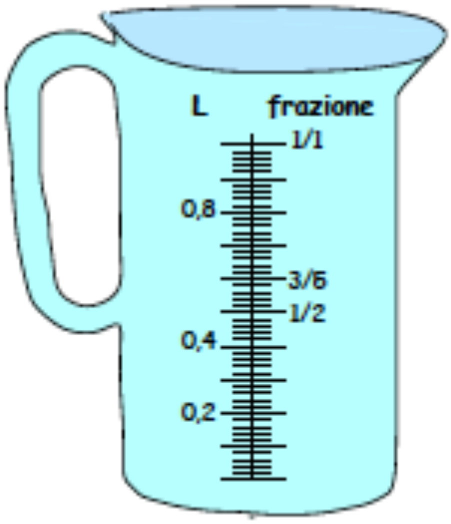
Un campioncino si allena su tre circuiti diversi. Nel mese di aprile ha compiuto 7 percorsi di 77,450 km, 6 di 83,730 km e 8 di 99,350 km. In tutto ha impiegato 61 ore e mezza.

Quanti km ha percorso in totale?
A quale velocità media ha viaggiato?

Ecco un contenitore graduato.
Alla sinistra della scala si leggono le misure decimali e a destra le corrispondenti frazioni.

Il contenitore è però usurato e occorre completarlo. Pensaci tu!

Dove metteresti le misure 3/4 e 1/4 ?
A quale decimale corrispondono?



Completa la tabella:

frazione	3/4	4/5	5/8	13/50	9/25	14/10
numero	0,75					

Filiberto in parte ha ragione, ma basterebbe avere due torte, ciascuna suddividerla in 10 fette e dalle 20 a disposizione prenderne 14. Però così sarebbe come dividere in 20 fette e prenderne 14. Ecco allora l'importanza di precisare ogni volta qual è l'intero!
Da una sola torta suddivisa in 10 fette non si possono prendere 14 fette.
Tuttavia il numero 1,4 = 14:10 esiste, dunque in molti casi occorre dimenticare la frazione come parte e considerare la frazione come numero. Allora il numeratore può benissimo essere maggiore del denominatore.

Entra in scena Bice, la calcolatrice

Una ripartizione difficile

Tre amiche hanno vuotato i loro salvadanai. Il ricavato lo suddividono in 7 parti uguali da versare a enti benefici.
I ricavi, in euro, sono stati i seguenti:
323,80 ; 241,25 ; 273,15
A quanto ammonta l'importo di ciascuna delle 7 parti?

Completa:

Calcolo:	(.............. + ... + ...) : .....
Esempio di stima del risultato:	(320 + 240 + 280) : 7 = ...
Calcolo con la calcolatrice:	([ ] + [ ] + [ ]) ÷ [ ] = 119.74285
Risposta	

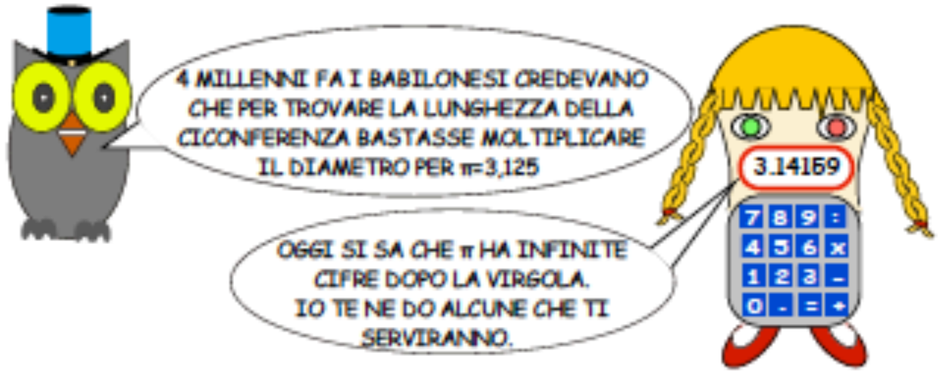
Quando non si è sicuri o si è di fronte a un calcolo di una certa complessità, è consigliabile fare un progetto, come indicato sopra.

La stima può essere fatta i vari modi, basta che i numeri siano semplificati (arrotondati) e il suo calcolo dev'essere eseguito mentalmente.

Per descrivere le operazioni della calcolatrice, conveniamo di rappresentare:
- con una freccia azzurra verso il basso, l'entrata di un dato
- con una freccia rossa rivolta in alto, l'uscita del risultato
- con dei quadrati i tasti da premere nell'ordine.

Infine occorre decidere quante cifre dopo la virgola ha senso considerare. Dipende...
Nel nostro problema il risultato è in euro, perciò si potrebbe rispondere con 119,74 oppure con 119,75. In questo caso, però ...

Lunghezza della circonferenza



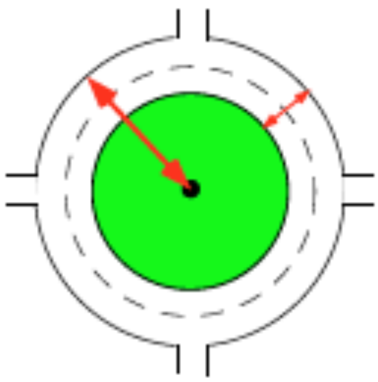
Filiberto ha disegnato col compasso una bella circonferenza.
L'apertura del compasso è esattamente 10 cm.
Qual è la lunghezza della circonferenza disegnata da Filiberto? (Senza calcolatrice, con $\pi = 3{,}14$)

Confronta il risultato con quello che ti dà Bice.

10 × 2 × π = 62.831853

La circonferenza di un'aiola misura 10,50 m.
Trova il diametro. (Senza calcolatrice con $\pi = 3$)
Confronta il risultato con quello che ti dà Bice.

La rotatoria



Il disegno rappresenta una rotatoria stradale. Le distanze indicate in rosso sono 75 m e 12 m. (Il disegno non rispetta le proporzioni).
Si vuole conoscere la lunghezza delle 3 circonferenze: interna, mediana ed esterna.

Calcola dapprima tue stime usando $\pi=3$ e poi fatti aiutare da Bice per ottenere un risultato più preciso.

Numeri positivi e negativi

Euro in tasca

Se ho in tasca 5 € e spendo 3 €, mi rimangono in tasca 2 €. Troppo facile!
Ma se poi voglio comperare qualcosa che costa 7 €, come posso fare?
Per esempio mi faccio prestare da un amico 5 €.
Ora, i soldi che ho in tasca li chiamiamo **averi**, quelli che devo a un amico **debiti**.
Gli averi li indico con numeri **positivi**, i debiti con numeri **negativi**.

Ecco che cosa è successo ad Arturo quando si è recato al centro commerciale.
Completa la colonna del suo avere.

Che cosa ha fatto	Suo avere in euro
È arrivato con 13 € in tasca	
Ha speso 4 € all'edicola	
Ha speso 12 € in pasticceria	
Incontra la nonna che gli dà 10 €	
Compera un gioco da 13 €	
La nonna gli dà altri 10 €	

Dadi rossi e gialli

Si lanciano i due dadi e si calcola la somma dei punteggi, tenendo presente che quelli del dado rosso sono positivi, mentre quelli del dado giallo sono negativi.
Quali somme si potrebbero ottenere?

Che frazione è?

(Ti puoi aiutare con dei disegni).

<table>
<tr><td>La metà della metà</td><td></td><td rowspan="7">
</td></tr>
<tr><td>La metà di un quarto</td><td></td></tr>
<tr><td>Un quarto della metà</td><td></td></tr>
<tr><td>La metà di un terzo</td><td></td></tr>
<tr><td>Due terzi della metà</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

Raccolta delle castagne

Ercolino e Arturo tornano a casa dopo aver riempito un sacco con 256 castagne. A un certo punto il sacco si rompe e tutte le castagne cadono. Ercolino e Filiberto raccolgono più castagne che possono ma 1/2 delle castagne rotolano nel bosco, 1/4 delle rimanenti se le portano via due scoiattoli e metà di quelle che restano cadono in un ruscello. Quante castagne rimangono ai due amici?

Una bella spirale

Diametro della semicirconferenza rossa: 1,35 m

Diametro della semicirconferenza blu: metà della rossa.

Diametro della semicirconferenza verde: metà della blu.

Diametro della semicirconferenza nera: metà della verde.

Quanto è lunga l'intera spirale?

(Scrivi il calcolo risolutivo in un'unica espressione, fai una stima, programma ed esegui il calcolo con la calcolatrice, confronta il risultato con la tua stima e, se ti pare credibile, decidi quante cifre decimali tenere in considerazione).