

**Caratteristiche psicologiche e didattiche
della formazione al *problem solving***

**Analisi di situazioni mirate
alla risoluzione di problemi**

(Gianfranco Arrigo)

**Due anime della matematica...
e due dell'apprendimento**

Risoluzione di problemi



Matematica

Hilbert
Kolmogorov
Bourbaki
(XX secolo)

Archimede (III a.C.)
Luca Valerio XVI secolo
Euler (XVIII secolo)
Gauss (IXX secolo)



Costruzione e sistemazione
di teorie

Apprendimento strategico

Sviluppo del pensiero divergente
(intuizione, creatività)

Socializzazione dell'apprendimento
(apprezzamento delle idee altrui,
confronto razionale)

Fiducia in se stessi

Interesse per
l'attività matematica

Didattica

Acquisizione di concetti
e procedimenti

Organizzazione delle conoscenze

Differenziazione

Autovalutazione

Apprendimento concettuale

Il vero problema

Che cos'è un (vero) problema

Un problema sorge quando un essere vivente, motivato a raggiungere una meta, non può farlo in forma automatica o meccanica, cioè mediante un'attività istintiva o attraverso un comportamento appreso.

Kanizsa G. (1973). Il «problem solving» nella psicologia della Gestalt. In: Mosconi G., D'Urso V. (a cura di). *La soluzione dei problemi*. Firenze: Giunti-Barbera, p. 35.

Distinzione tra esercizi e problemi

*Gli **esercizi** possono essere risolti utilizzando regole già apprese e in via di consolidamento (...). I **problemi** coinvolgono o l'uso di più regole (alcune anche in via di esplicitazione) o la successione di operazioni la cui scelta è atto strategico, talvolta creativo, dell'allievo stesso.*

D'Amore B. (1993). *Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving*. Milano: Franco Angeli.

di fronte a un problema nuovo...

siamo tutti ai piedi della scala

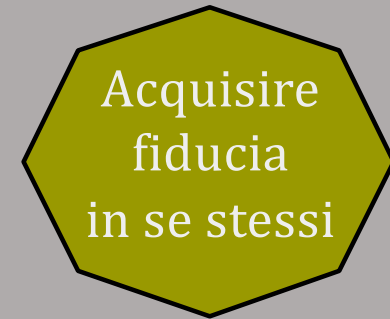
tentiamo per gioco...

ogni tentativo può essere utile, anche se errato...

e chi tenta, prima o poi, ci azzecca

anche il più piccolo passo verso la meta...

è fonte di grande soddisfazione.



s'impura a confutare **razionalmente**

s'impura a formulare **congetture**

si esprimono le **proprie** idee giustificandole

s'impura ad **ascoltare**

s'impura a **lavorare insieme** in piccoli gruppi



piacere ... di scoprire



... di agire

... di pensare liberamente senza timore di sbagliare

... di vivere un'affascinante avventura ...

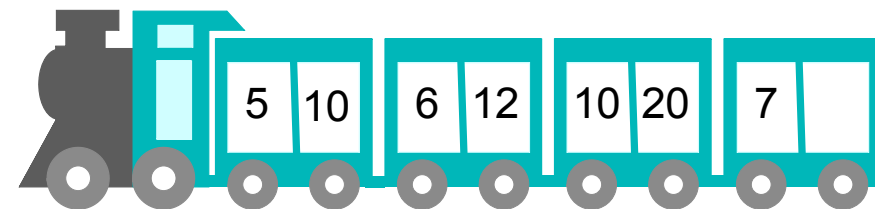
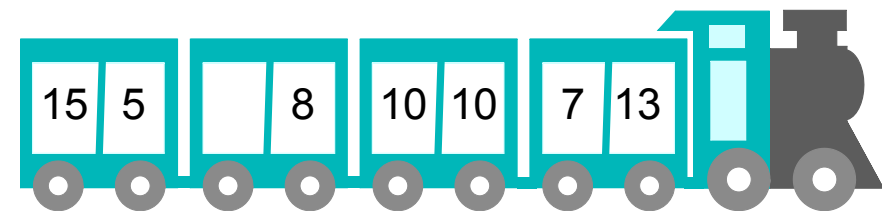
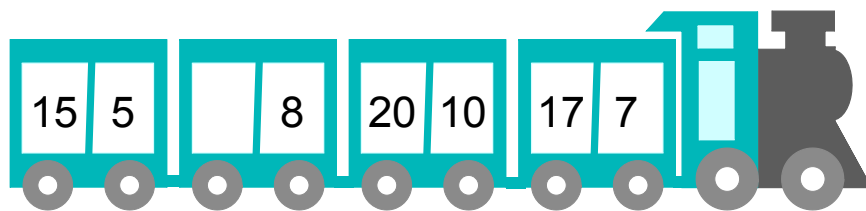
... l'avventura della matematica

Esempi di problemi

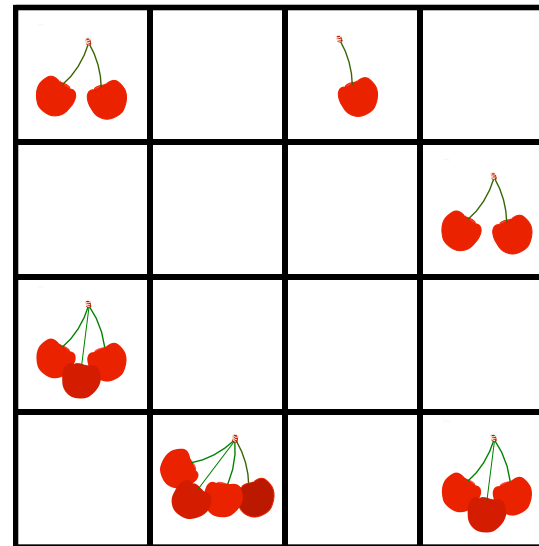
(alcuni sono tratti dai fascicoli «I nostri amici numeri», Sapyent)

IL SEGRETO DEI TRENINI

OGNI TRENO HA UN SEGRETO. IN OGNI VAGONE È NASCOSTO UN NUMERO, QUAL È?



GIOCHI DI RIFLESSIONE



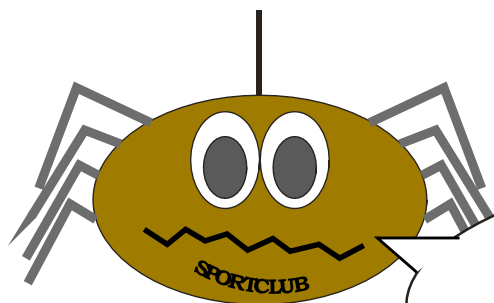
DEVI INSERIRE NEI QUADRATINI VUOTI ALTRE CILIEGIE IN MODO CHE IN OGNI RIGA E IN OGNI COLONNA VI SIA SEMPRE SOLO UNA CILIEGIA SOLA, UNA COPPIA, UNA TERNA E UNA QUATERNA.

Un regalo per Genoveffa

Da quad. III

Arturo, Filiberto e Ercolino vogliono realizzare degli orecchini, per il compleanno di Genoveffa. Hanno 4 perline rosse, 12 perline verdi e 48 perline gialle.

Due orecchini che formano un paio devono avere lo stesso numero di perline e di uno stesso colore.



VEDIAMO, SE HO CAPITO BENE, CON 4 PERLINE ROSSE POTREMMO FARE DUE PAIA DI ORECCHINI, CON CIASCUNO 1 PERLINA. OPPURE UN PAIO SOLO CON CIASCUNO 2 PERLINE. GIUSTO?

Un regalo per Genoveffa

Da quad. III

COLORE	NR. PERLE	NR. PERLE PER ORECCHINO	NR. PAIA ORECCHINI
ROSSO	4	1	2
		2	1
VERDE	12	1	6
		2	3
		3	2
		6	1
GIALLO	48	1	24
		2	12
		3	8
		4	6
		6	4
		8	3

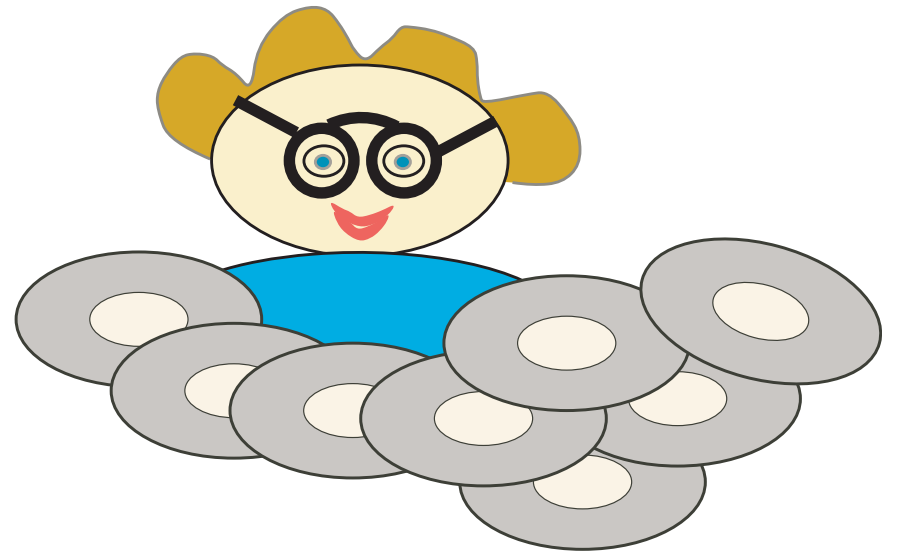
12 **2** **?**

I casi $(8,3)$, $(12,2)$ e anche $(24,1)$ sono stati contestati da molti alunni. Un bell'esempio di interpretazione del risultato matematico in funzione della situazione reale.

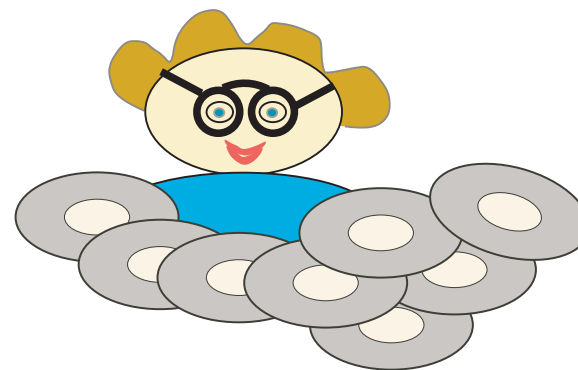
CD DI MUSICA

GENOVEFFA HA COMPERATO 10 CD.
3 SONO DI MUSICA CLASSICA
E GLI ALTRI SONO DI CANTI DELLA
MONTAGNA O DI MUSICA LEGGERA.

QUANTI POTREBBERO ESSERE
I DISCHI DI MUSICA LEGGERA?



CD DI MUSICA (Soluzione)



Occorre trovare **tutti i casi possibili**.

Gli alunni citano casualmente scomposizioni additive del 7: $3+4$, $5+2$, ...

Ma alla domanda: «Sei sicuro di averli trovati tutti? » o all'intervento autoritario dell'insegnante «Ne avete dimenticato uno!»

(che sia vero o no) non sanno rispondere in modo esauriente.

Nasce la necessità di procedere secondo un **criterio** che va trovato.

Per esempio $1+6$, $2+5$, $3+4$, $4+3$, $5+2$, $6+1$

E lo zero? Si può discutere...

CONFEZIONI DI BOTTIGLIE

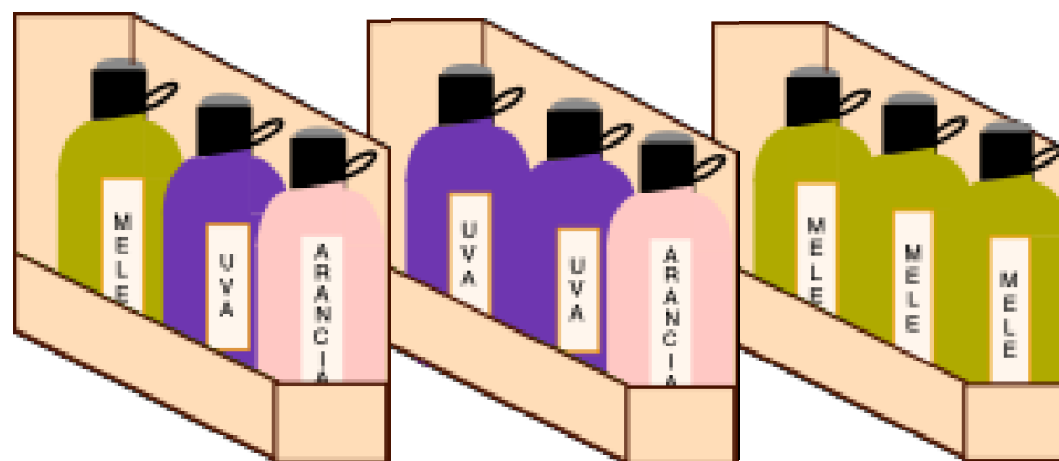
Genoveffa ha in dispensa parecchie bottiglie di succo di uva, mela e arancia.



F. E. IV

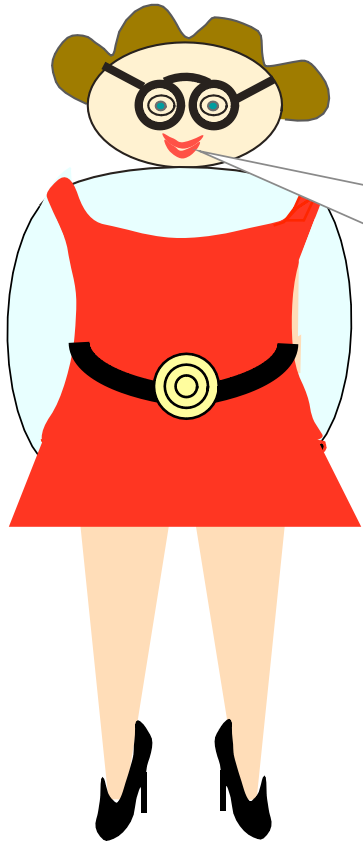
Vuole preparare confezioni di tre bottiglie ciascuna.

Per esempio:



Quanti tipi diversi di confezioni può allestire?

CONFEZIONI DI BOTTIGLIE: ESEMPIO DI RISOLUZIONE



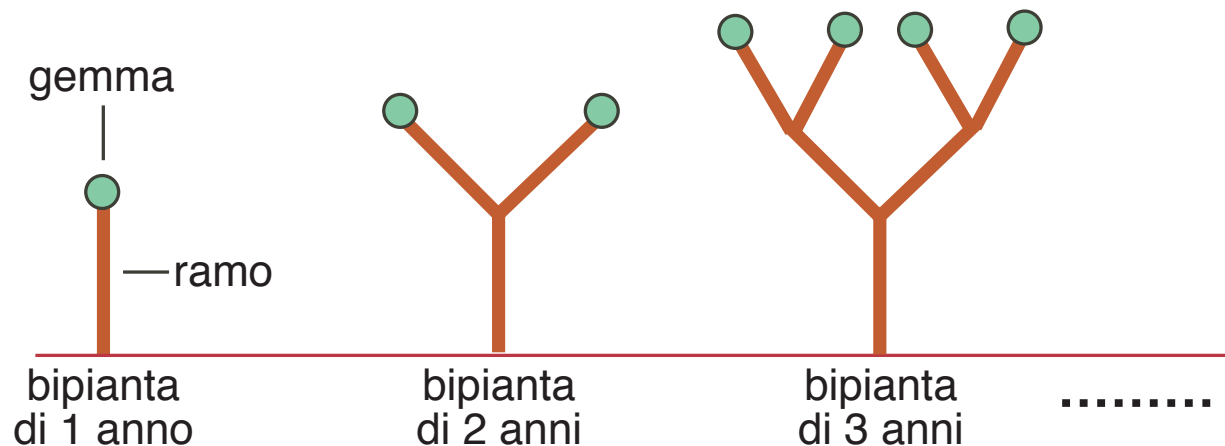
NON È IMPORTANTE
COME SONO MESSE
LE BOTTIGLIE.
PER ESEMPIO
UUA, UAU E AUU
SONO LA STESSA
CONFEZIONE.
SE VUOI, COMPLETA
LA TABELLA CHE
TI HO PREPARATO.
SE NECESSARIO
AGGIUNGI ALTRE
RIGHE.

U	M	A
3	0	0
0	3	0
0	0	3
0	1	2
0	2	1
1	0	2
1	1	1
1	2	0
2	0	1
2	1	0

Ci sono 10 possibili
confezioni, non una di più,
non una di meno.

Le bipiante di Gufo Filiberto

Da quad. III



Disegna una bipianta di 4 anni. Quante gemme ha?

Senza disegnare, sapresti calcolare quante gemme ha una bipianta di 5 anni?

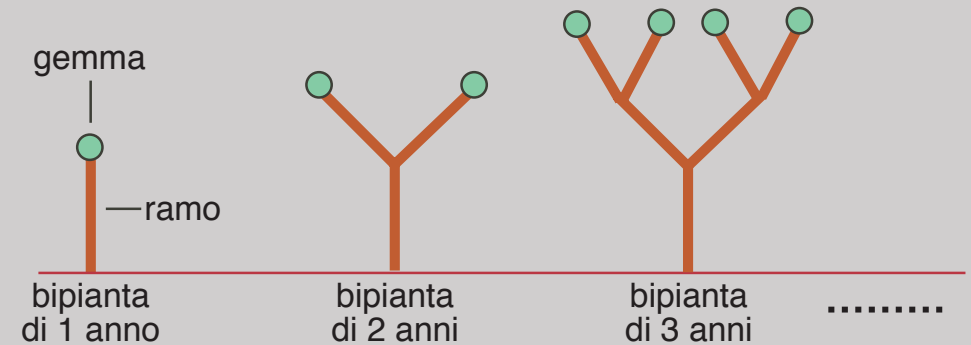
.....

Le bipiante di Gufo Filiberto: soluzioni

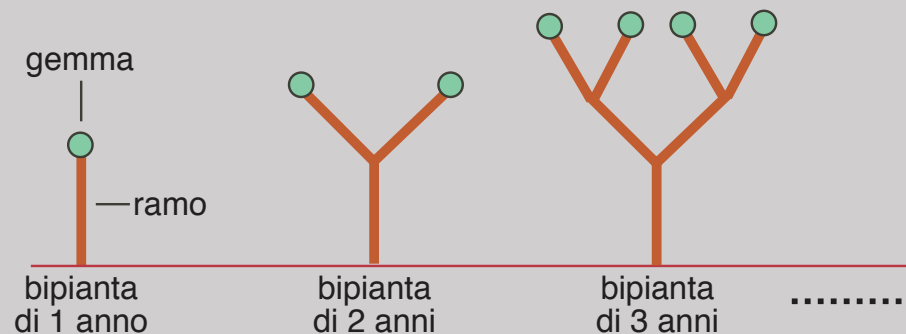
Da quad. III

Rispondiamo con una tabella:

anni	numero gemme	numero rami
1	1	1
2	2	$1+2=3$
3	$2 \times 2 = 4$	$1+2+4=7$
4	$2 \times 2 \times 2 = 8$	$1+2+4+8=15$
5	$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$	$1+2+4+8+16=31$



Per gli insegnanti



anni	rami	gemme
1	1	1
2	1+2=3	2
3	1+2+4=7	2²=4
4	1+2+4+8=15	2³=8
5	1+2+4+8+16=31	2⁴=16
10	1+2+4+8+16+32+64+128+256+512=1023	2⁹=512
...
n	1+2+4+...+2ⁿ⁻¹= 2ⁿ-1	2ⁿ⁻¹

Una serata da Mago Ogam

Senza preamboli (e senza nemmeno salutare) Mago Ogam quella sera sparò un problemino... tosto.

Entro sabato prossimo trovate il **più piccolo** numero che ...

- ... diviso per 2 dia resto 1
- ... diviso per 3 dia resto 2
- ... diviso per 4 dia resto 3
- ... diviso per 5 dia resto 4
- ... diviso per 6 dia resto 5
- ... diviso per 7 dia resto 6
- ... diviso per 8 dia resto 7
- ... diviso per 9 dia resto 8

Una serata da Mago Ogam: soluzione

Se H è il numero cercato, consideriamo $H+1$, che è esattamente divisibile per 2, per 3, per 4, per 5, per 6, per 7, per 8 e per 9.

Il più piccolo dei numeri che verificano queste condizioni (il minimo comune multiplo) si può ottenere per esempio così:

$$H + 1 = 9 \times 8 \times 7 \times 5 = 2520$$

Di conseguenza il numero cercato è $H = 2520 - 1 = \mathbf{2519}$

IL MELETO

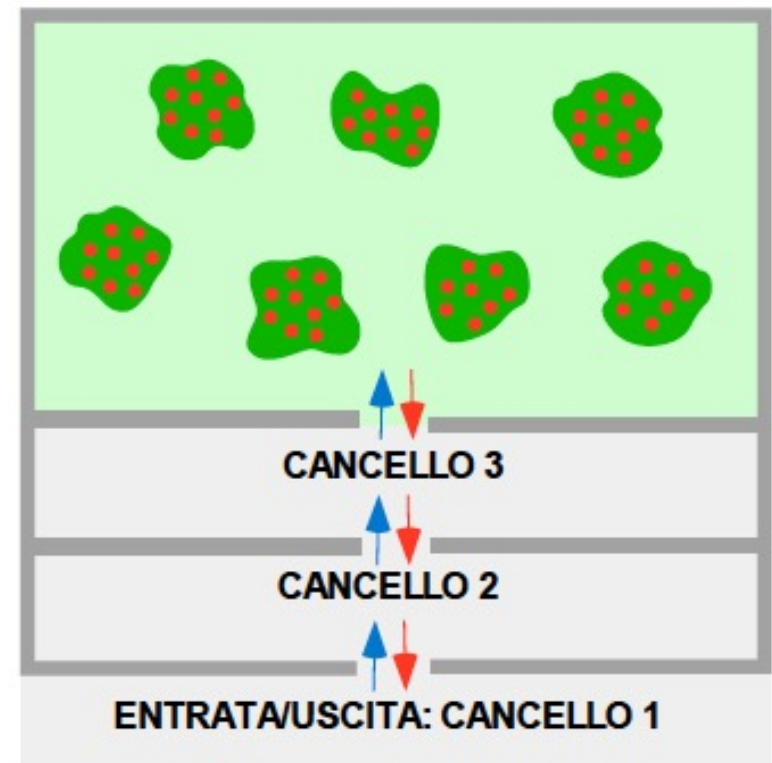
F. E. V

Gatto Arturo entra in un meleto attraversando tre cancelli. Coglie un certo numero di mele. Nel ritorno, al primo cancello deve lasciare al guardiano metà del numero di mele colte più mezza mela; al secondo cancello deve lasciare metà del numero di mele rimaste più mezza mela; al terzo cancello deve lasciare metà del numero di mele rimaste più mezza mela.

La cosa curiosa è che non ha mai dovuto dimezzare nessuna mela.

È possibile? Quante mele avrà colto?

Che cosa ne pensate?



IL MELETO (soluzioni)

Prima riflessione. Quando arrivi a un cancello devi avere un **numero dispari** di mele. Esempio $9 : 2 + 0,5 = 4,5 + 0,5 = 5$ che sono le mele da lasciare al guardiano. Così te ne restano 4 intere e nessuna mela è stata dimezzata.

Seconda riflessione. Non tutti i numeri dispari vanno bene, per esempio il 9 non va perché ti rimangono in mano 4 mele, che è pari. Si può procedere per tentativi.

Per insegnanti: soluzione algebrica

Mele che deve avere

al cancello 1: $2n + 1$

al cancello 2: $2(2n + 1) + 1 = 4n + 3$

al cancello 3: $2(4n + 3) + 1 = 8n + 7$

n	$8n + 7$	C3	C2	C1
	prese	rimangono	rimangono	rimangono
1	15	7	3	1
2	23	11	5	2
3	31	15	7	3
4	39	19	9	4

Osservando la successione 15, 23, 31, 39, ... si vede che $f(n) - f(n-1) = 8$

Infatti: $8n + 7 - [8(n-1) + 7] = 8n + 7 - [8n - 1] = 8n + 7 - 8n + 1 = 8$

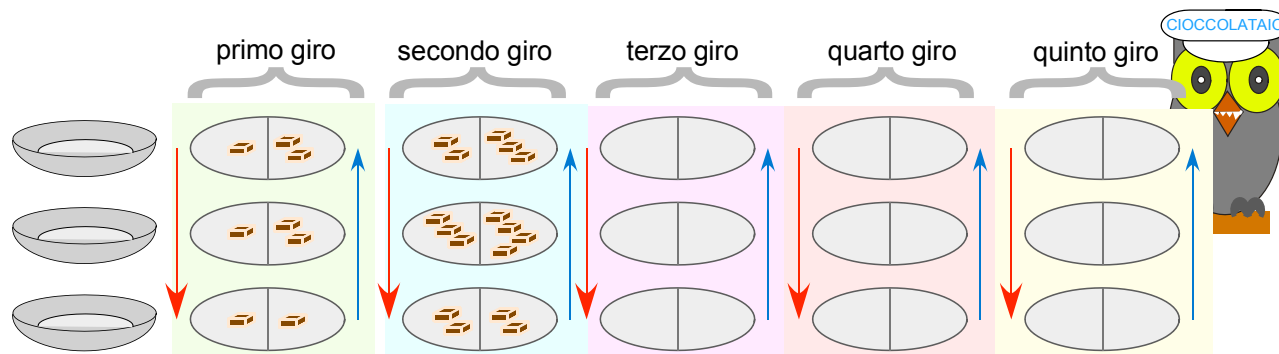
L'osservazione può essere fatta anche dagli alunni e rimane come congettura.

ANCORA CIOCCOLATINI

F. E. V

Gatto Arturo ha un sacco di cioccolatini. Li vuole distribuire in tre cestini in questo modo: inizia a mettere un cioccolatino nel primo cestino in alto e poi compie un giro «giù-su» passando da un cestino all'altro.

Ogni volta che incontra un cestino, vi mette **un solo** cioccolatino.



Ora tocca a te. (...)
Completa il disegno
fino al quinto giro.

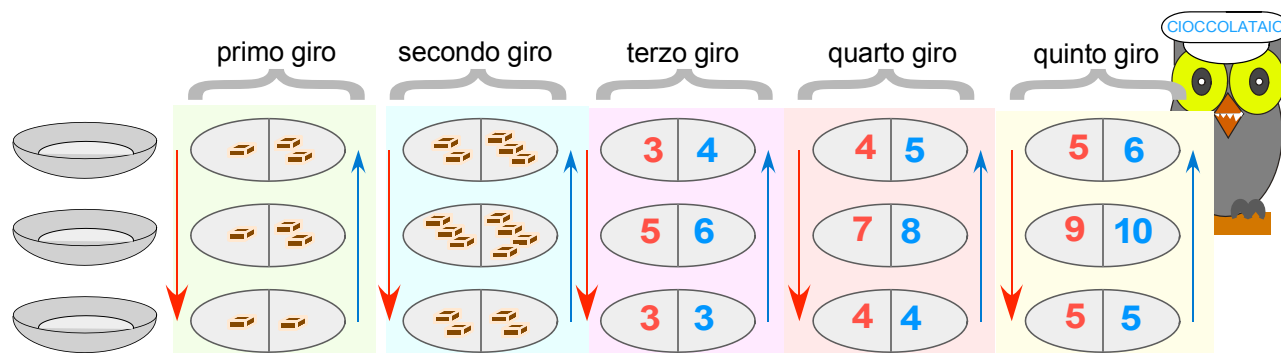
Quanti cioccolatini ha distribuito dopo 5 giri? (...) E se facesse 18 giri?

Se avesse distribuito 101 cioccolatini, quanti giri avrebbe effettuato?

(Ti può aiutare prendere tre scodelle e cioccolatini ed eseguire la distribuzione)

ANCORA CIOCCOLATINI (soluzione)

Disegno completato:



Dopo 5 giri sono stati distribuiti $5+10+6=21$ cioccolatini.

Dopo ogni giro «giù-su» il numero in basso (colonne blu) è uguale a quello del giro, in mezzo c'è il suo doppio e in alto il consecutivo.

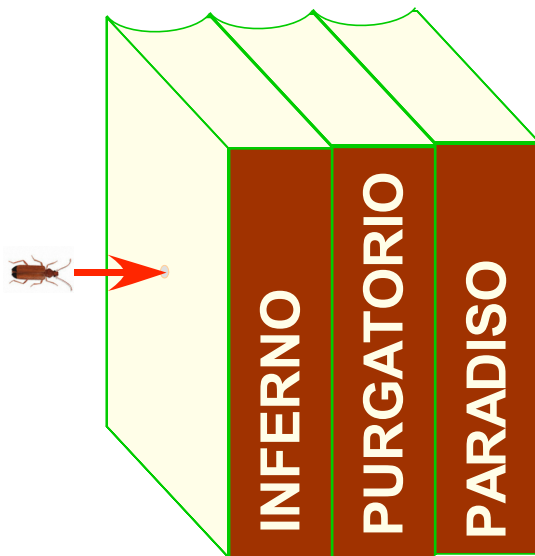
Dopo 18 giri sono stati distribuiti $18+36+19=73$ cioccolatini.

Se avesse distribuito 101 cioccolatini avrebbe effettuato **25** giri «giù-su».

L'iter risolutivo «per tentativi» è molto interessante e stimolante.

UN TARLO IRRISPETTOSO: OLTRAGGIO A DANTE

N. P.



I tre tomi di questa edizione della «Commedia» hanno tutti 180 pagine, copertine comprese.

La numerazione delle pagine (copertine comprese) continua da un volume all'altro, cioè:

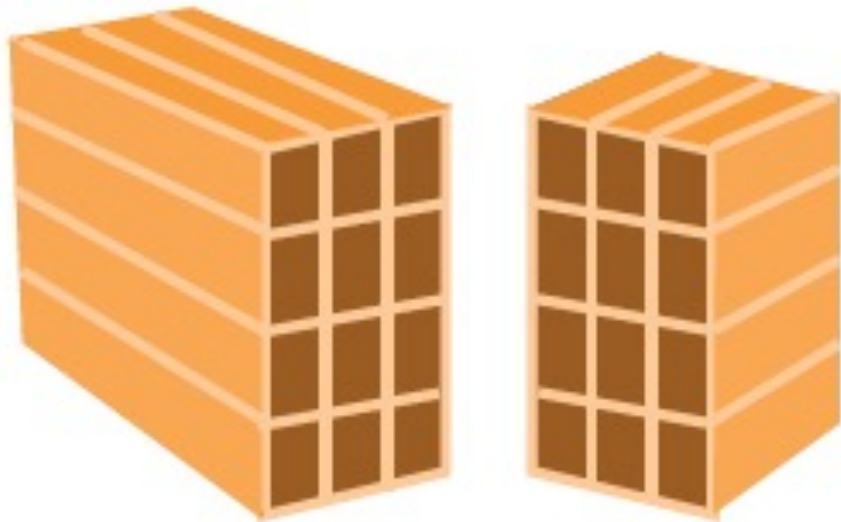
l'Inferno inizia da pagina 1 e termina con la pagina 180, il Purgatorio parte da 181, ecc.

Un tarlo perfora i tre volumi (vedi la figura) e scava un tunnel fin quando sbuca dall'altra parte dopo aver perforato i tre volumi.

Che numero porta l'ultima pagina perforata?

Da quad. IV-V

Il rompicapo del mattone



Un mattone pesa 1 kg più mezzo mattone.

Sì, ma quanto pesa in kg un mattone?

Soluzioni dei due ultimi problemi

Il rompicapo del mattone

1 kg è il peso dell'altra metà, quindi un mattone intero pesa **2** kg.

UN TARLO IRRISPETTOSO: OLTRAGGIO A DANTE

Ecco il percorso del tarlo, volume dopo volume.

Inferno: dalla 181 alla 1

Purgatorio: dalla 363 alla 182

Paradiso: dalla 545 alla 364.

L'ultima pagina perforata dal tarlo è la **364**.

Indirizzi utili

gianar76@gmail.com

www.smasi.ch

<https://rsddm.dm.unibo.it>

Per consultazione saggi
e ordinazione fascicoli Sapyent

<https://bit.ly/inostriamicinumeri>

<http://bit.ly/GeometriaDynamica>