# Matematica inattesa

**Giorgio Mainini, SMASI Lugano, smasi.ch**

smasi

società matematica della svizzera italiana

## Didone e la fondazione di Cartagine

Eneide, Libro I

Devenere locos ubi nunc ingentia cernes
moenia surgentemque novae Karthaginis arcem,
mercatique solum, facti de nomine Byrsam,
taurino quantum possent circumdare tergo

Giunsero ai luoghi laddove adesso tu scorgi
mura possenti, e sorgere la rocca della nuova Cartagine,
e acquistarono il suolo, dal nome del fatto Birsa,
quanto potessero recingere con una pelle di toro

Trad. Luca Canali

# La matematica di Didone

I Fenici sapevano che, fissati il perimetro e il numero dei lati di un poligono, il poligono con l'area massima è quello regolare.

Supponendo dunque che la striscia fosse lunga una parasanga, equivalente a 30 stadi, circa 5500 metri secondo Senofonte, Didone avrebbe potuto cingere un terreno a forma di:

***triangolo equilatero***:

$$\text{Area} = \left(\frac{30}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \approx 43{,}301 \ \ [\text{stadi}^2]$$

***quadrato:***

$$\text{Area} = \left(\frac{30}{4}\right)^2 = 56{,}25 \ \ [\text{stadi}^2]$$

***pentagono regolare :***

$$\text{Area} = \left(\frac{30}{5}\right)^2 \cdot \frac{5}{2} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{4}} \approx 61{,}92 \ \ [\text{stadi}^2]$$

***esagono regolare :***

$$\text{Area} = \left(\frac{30}{6}\right)^2 \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \approx 64{,}952 \ \ [\text{stadi}^2]$$

Si vede bene che l'area cresce al crescere del numero dei lati del poligono regolare: allora perché non usare il "poligono regolare" con “un numero infinito” di lati?

Ma quel "poligono regolare” sarebbe un cerchio e il suo contorno una circonferenza.

***cerchio :***

$$\text{Area} = \pi \cdot \text{raggio}^2 = \pi \left( \frac{C}{2\pi} \right)^2 = \frac{C^2}{4\pi} = \frac{30^2}{4\pi} \approx 71{,}62 \quad [\text{stadi}^2]$$

Secondo la tradizione però Didone ebbe un’idea migliore:

approfittò di un tratto di costa e vi “appoggiò" la sua striscia così da formare una semicirconferenza.

Il suo possedimento crebbe fino a 143,24 stadi$^2$, il doppio del massimo trovato prima.

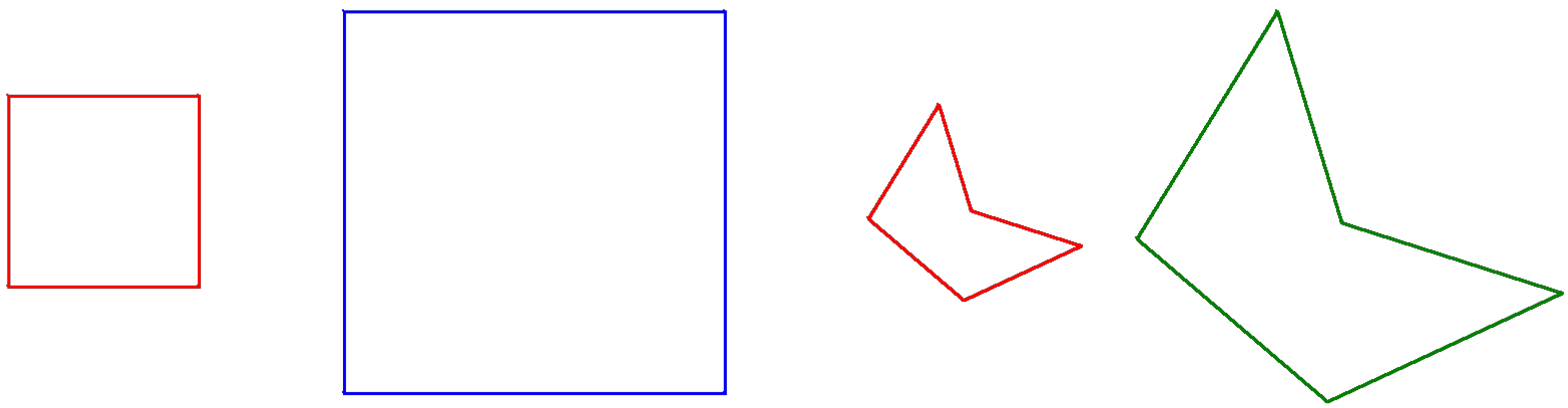
La matematica fa quello che può
ma tocca a noi
interpretare i risultati che ci fornisce
senza lasciarci influenzare da
intuizioni fallaci

Qualche esempio

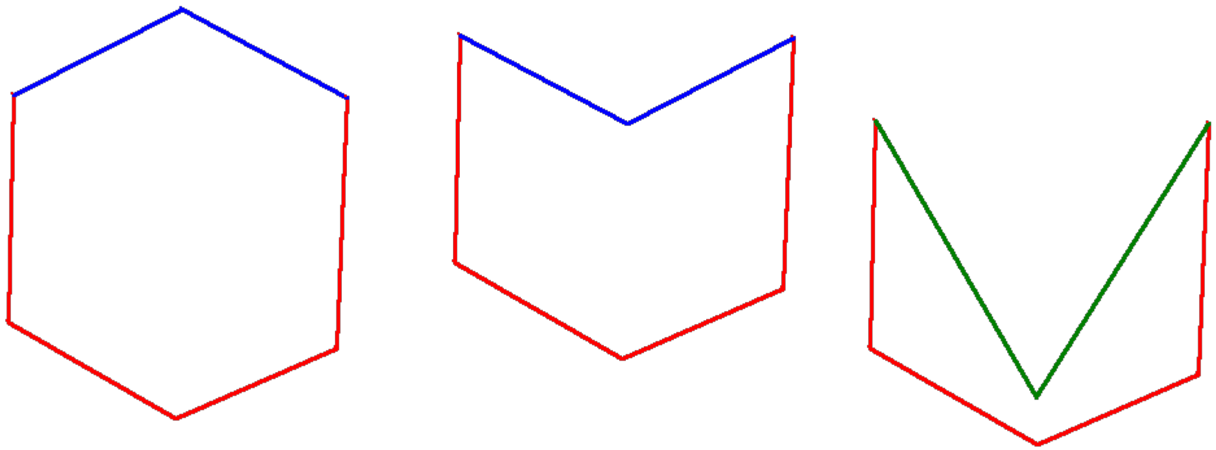
Il problema di Didone ci mette sulla strada di pensare che, quanto maggiore è il contorno, tanto maggiore sarà la superficie contornata.

Difatti, se avesse tagliato la pelle di toro in una strisciolina più lunga…

I seguenti disegni sembrano confermarci nell’idea.



Purtroppo l’idea è falsa e già le seguenti immagini lo mostrano chiaramente:



Ah, bèh, sì, se si passa da poligoni convessi a poligoni concavi…
Ma se si aggiungono lati “fuori” dal poligono l’idea resta buona.
O no?

# Prima un po' di mate

Una successione come la seguente

2 ; 6 ; 18 ; 54 ; 162 ; …

si chiama **progressione geometrica** di **ragione** 3.

In generale, se la ragione è k, si ha
$t\ ;\ tk\ ;\ tk^2\ ;\ \dots\ ;\ \dots\ ;\ \dots\ ;\ tk^{n-1}\ ;\ tk^n\ ;\ \dots$

Di una progressione geometrica si può calcolare la somma dei suoi primi n termini con la seguente formula:

$$G_k = \frac{t\left(k^{n+1}-1\right)}{k-1}$$

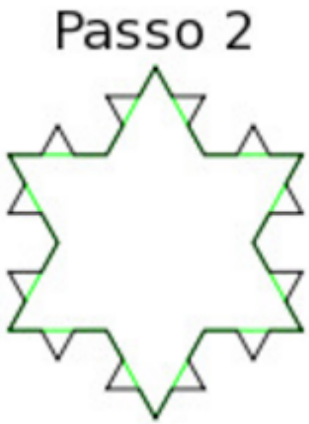
# Il fiocco di neve di Von Koch

(Helge von Koch, Stoccolma 1870 - Danderyd 1924)

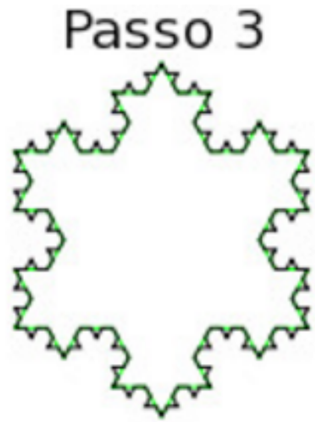
Si comincia con un triangolo equilatero


Si divide ogni suo lato in 3 parti uguali
e si sostituisce quella centrale
con un “triangolino” equilatero

Si continua allo stesso modo

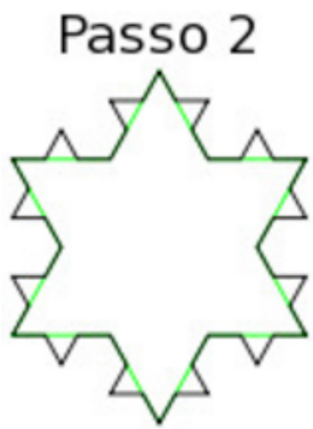



Si continua allo stesso modo




E si continua allo stesso modo all’infinito.

Guardiamo il contorno:




ad ogni passo un lato viene diviso in tre parti uguali e si sostituisce la parte centrale con due segmenti uguali entrambi a un terzo.

Di conseguenza se il lato è lungo s, la nuova spezzata sarà lunga $s \cdot \frac{4}{3}$ e anche il perimetro passerà da c a $c \cdot \frac{4}{3}$

Quindi, ponendo s = 1, cioè c = 3

Passo 0, perimetro = 3

Passo 1, perimetro = $3 \cdot \frac{4}{3} = 4$

Passo 2, perimetro = $3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 \approx 5{,}33\ldots$

Passo 3, perimetro = $3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 \approx 7{,}11\ldots$

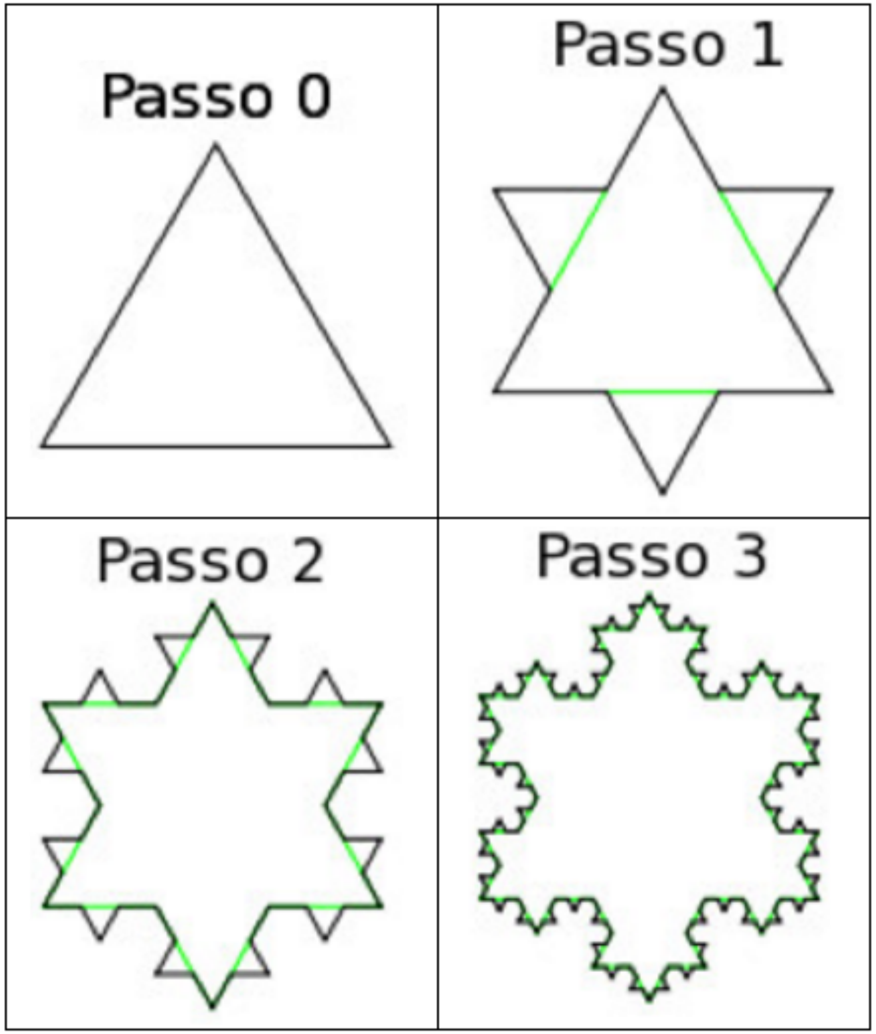
Passo n, perimetro = $3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$

Visto che il concetto di infinito è problematico, diremo che

il **contorno del fiocco di neve cresce oltre ogni limite**.

E l'area?

Rivediamo le figure

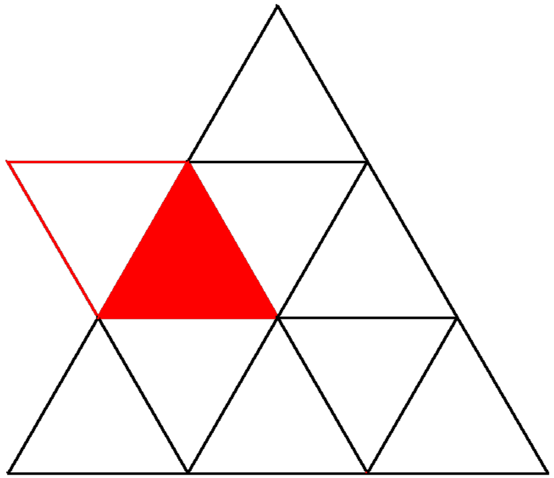



Si vede bene che, ad ogni passo

il numero dei "triangolini" è dato dal numero di lati della figura precedente

il numero dei lati viene moltiplicato per 4

l'area di ogni "triangolino" aggiunto è $\frac{1}{9}$ di quella del "triangolino" precedente



Il tutto viene mostrato nella seguente tabella,
supponendo che l'area del triangolo dato sia 1

| **Passo** | **Numero dei "triangolini"** | **Area di un "triangolino"** | **Area di tutti i "triangolini" nuovi** | **Area del fiocco** |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 3 | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{3}$ | $1+\frac{1}{3}$ |
| 2 | $3 \cdot 4$ | $\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}$ | $3\cdot 4\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}$ | $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}$ |
| 3 | $3 \cdot 4^2$ | $\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}$ | $3\cdot 4^2\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2$ | $1+\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2\right]$ |
| 4 | $3\cdot 4^3$ | $\left(\frac{1}{9}\right)^4$ | $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^3$ | $1+\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^3\right]$ |
| … | … | … | … | … |
| n | $3 \cdot 4^{n-1}$ | $\left(\frac{1}{9}\right)^n$ | $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$ | $Area_{fiocco}$ |

Per trovare l'area del fiocco all'n-esimo passo si devono sommare all'area iniziale tutti i numeri della terza colonna fino a k = n-1. Cioè

$$\text{Area}_{\text{fiocco}} = 1 + \left[ \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{4}{9} \right)^{2} + \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{4}{9} \right)^{3} + \ldots + \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{4}{9} \right)^{\text{n-1}} \right]$$

Nella parentesi quadra c'è la somma dei termini di una progressione geometrica il cui primo termine è $\frac{1}{3}$ e di ragione $\frac{4}{9}$ .

Si può quindi usare la formula vista prima

$$G_k = \frac{t\left(k^{n+1}-1\right)}{k-1}$$

con le opportune sostituzioni.

Ecco che cosa ne esce:

$$\text{Area}_{\text{fiocco}}=1+[...]=1+\frac{\frac{1}{3}\left(\left(\frac{4}{9}\right)^{n}-1\right)}{\frac{4}{9}-1}=1+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{n}-\frac{1}{3}}{-\frac{5}{9}}=1+\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{n}}{\frac{5}{9}}$$

Guardando da vicino il numeratore dell'ultima frazione si vede che $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{n}$ diventa sempre più piccolo al crescere di n, cioè si avvicina sempre più 0 quando n cresce oltre ogni numero per grande che sia.

Facciamo come Eulero: fidiamoci della nostra intuizione e fingiamo che diventi 0.

Allora si ha

$$\text{Area}_{\text{fiocco}}=1+\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{9}}=1+\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{5}=1+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}$$

**Riassumendo:**

**Il fiocco di neve**

**- ha un contorno che cresce oltre ogni limite**

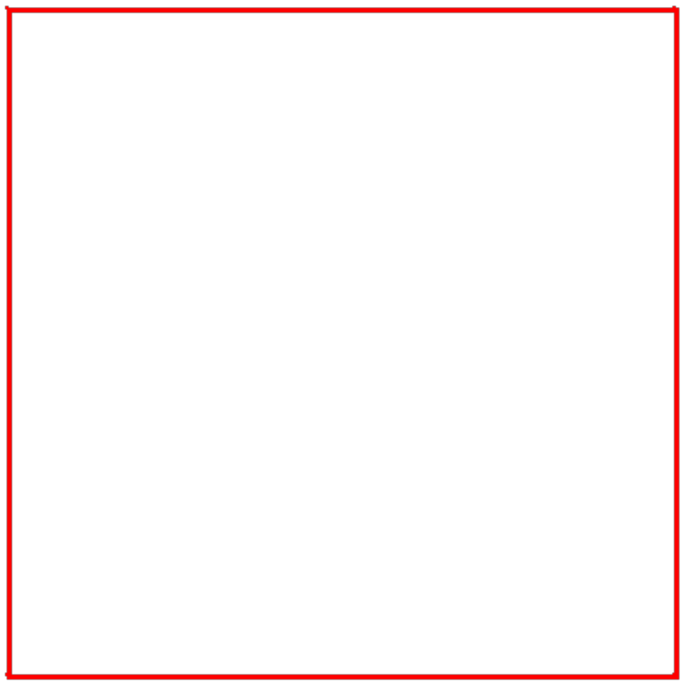
**- che racchiude una superficie finita.**

# Nuova intuizione

Se si ingrandisce una figura “attaccandoci” infinite volte dei pezzetti sempre più piccoli la sua superficie più di tanto non cresce.

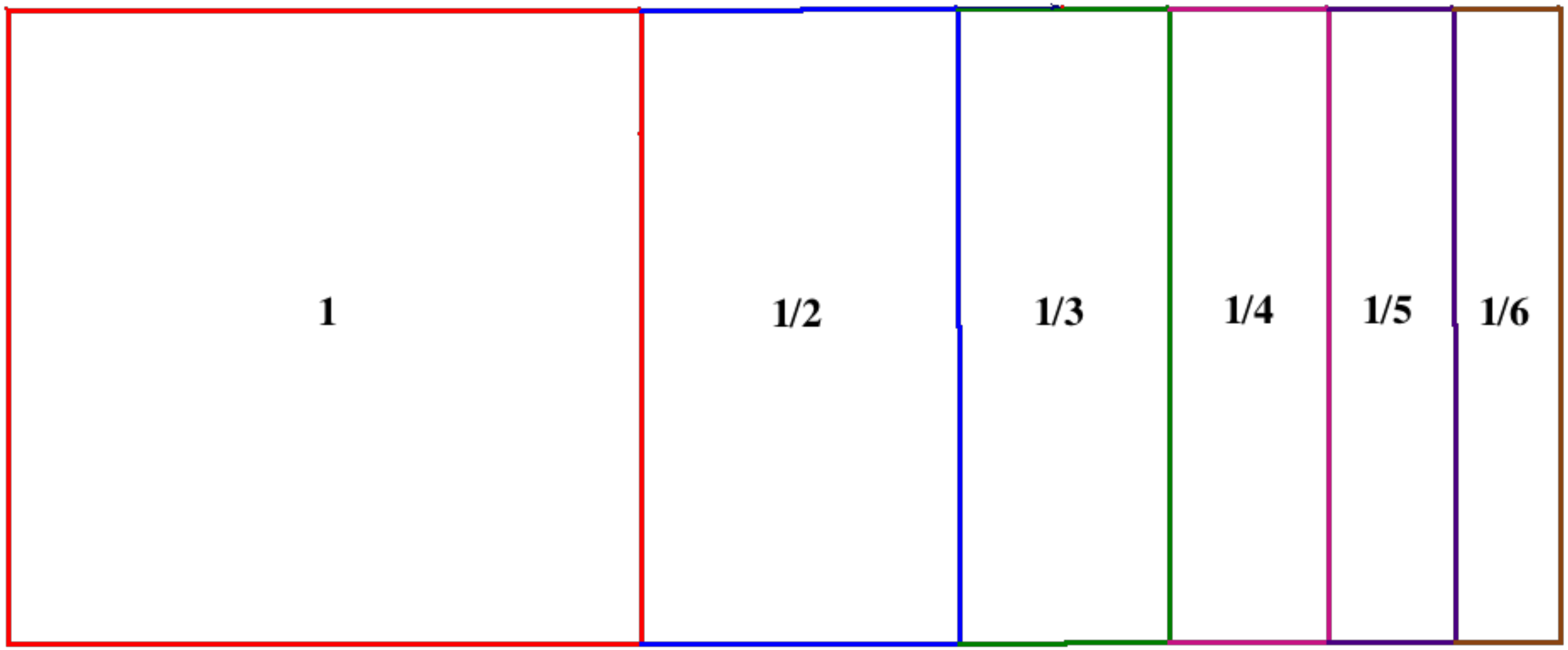
È vero?

Prendiamo questo quadrato:



e attacchiamogli prima un suo mezzo, poi un suo terzo, poi un suo quarto e così via.

Ecco i primi cinque passi, supponendo che l’area del quadrato sia 1:

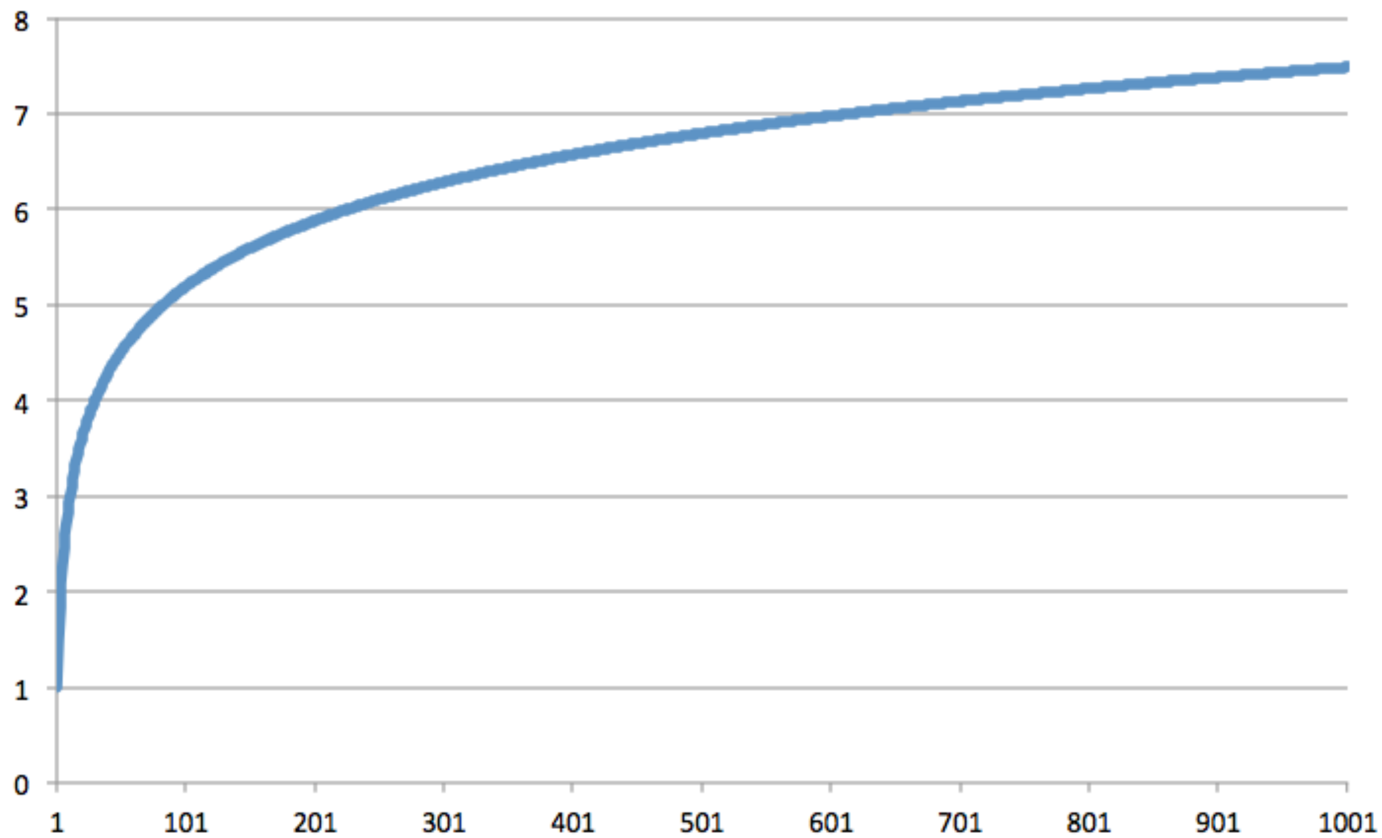



L’area complessiva è

$$1+\underbrace{\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{>\frac{1}{2}}}_{>1}+\underbrace{\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{>\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}}_{>\frac{1}{2}}}_{>1}+\underbrace{\underbrace{\frac{1}{17}+\ldots+\frac{1}{32}}_{>\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{33}+\ldots+\frac{1}{64}}_{>\frac{1}{2}}}_{>1}+\ldots$$

La crescita dell'area del quadrato è un bell'esempio di fiducia nella dimostrazione.

Abbiamo visto che l'area cresce oltre ogni limite ma, se il quadrato di partenza ha area 1, dopo 100 aggiunte è di solo circa 5,19 e dopo 1000 di circa 7,48.



Quindi non è sempre vero che se si ingrandisce una figura "attaccandoci" dei pezzetti sempre più piccoli, anche infinite volte, la sua superficie più di tanto non cresce.

Nel caso del fiocco di neve È VERO

Nel caso del quadrato NON È VERO

Insomma: l'intuizione NON basta

**La carta, il soffitto e la luna**

Lo spessore di un foglio di carta varia fra 0,02 e 0,3 mm.

Supponiamo di avere un foglio di carta spesso 0,1 mm:
se lo si piega in due, lo spessore diventa di 0,2 mm;

se lo si piega ancora una volta in due, lo spessore diventa di 0,4 mm.

**Quante volte si dovrà piegare per raggiungere l'altezza di locale abitabile?**

Secondo il Regolamento edilizio - Supporto per l’allestimento - Linee Guida cantonali, Dicembre 2014, art. 9, III,

"L’altezza minima dei locali d’abitazione è di 2.30 ml; …" (*)

Risposta inattesa:
se si piega 14 volte lo spessore sarà di circa 1,64 m
se si piega 15 volte lo spessore sarà di circa 3,28 m

(*): la scrittura "ml" è errata, quella giusta è "m": "ml" è il simbolo del millilitro.

**Se lo si piega 42 volte, quale sarà lo spessore?**

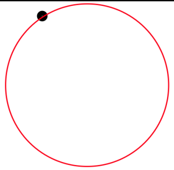
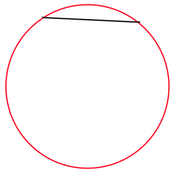
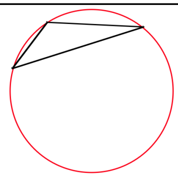
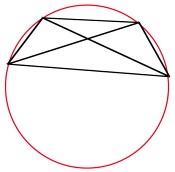
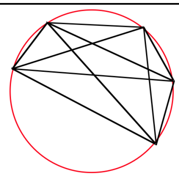
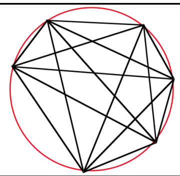
Considerato che lo spessore raddoppia ogni volta, diventerà

$2^{42} \cdot 0{,}1$ mm = 4'398'046'511'104 $\cdot$ 0,1 mm =
= 439'804'651'110,4 mm = ca. 439'804'651,1 m =
= ca. 439'805 km

più della distanza media tra la Terra e la Luna, che è di circa 384'400 km

Naturalmente 42 è la risposta alla *domanda fondamentale sulla vita, l'universo e tutto quanto*.

# Sempre sull'intuizione

| | Punti | Zone |
|---|---|---|
|  | 1 | 1 |
|  | 2 | 2 |
|  | 3 | 4 |
|  | 4 | 8 |
|  | 5 | 16 |
|  | 6 | ? |

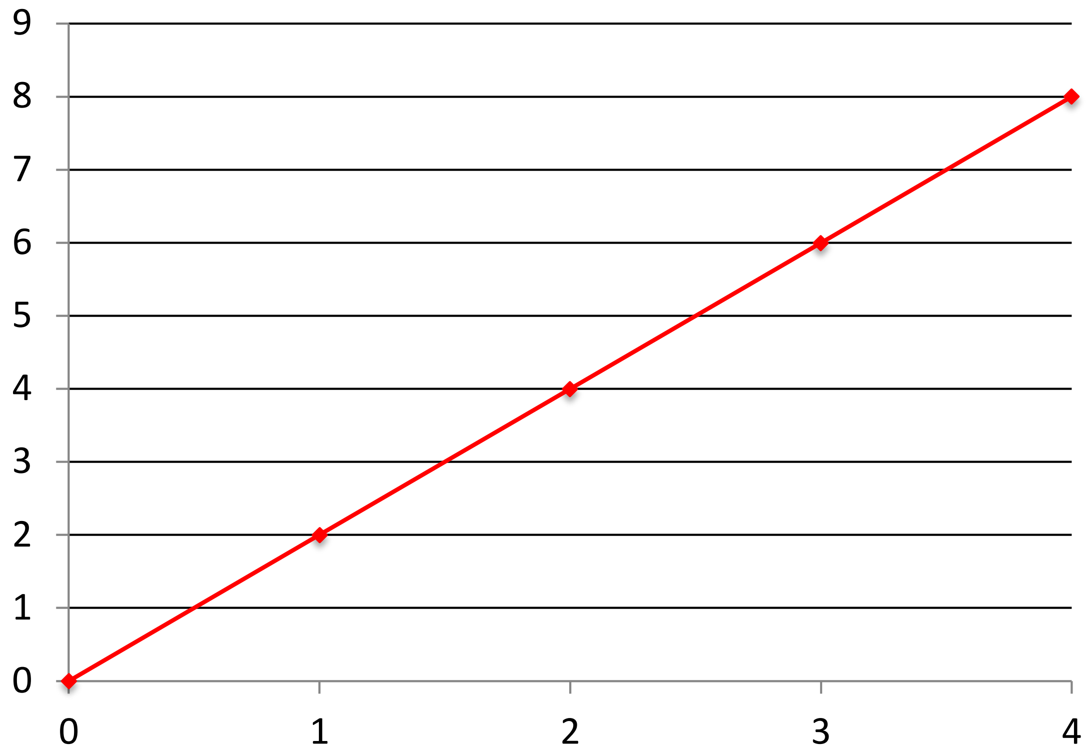
# Elongazione della molla

Uno degli esperimenti scolastici classici consiste nel trovare la legge che lega il peso di un oggetto appeso ad una molla con l'allungamento (elongazione) della molla.

Un possibile risultato dell'esperienza si vede nella tabella:

| **Peso, in g** | **Elongazione, in cm** |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 6 |
| 4 | 8 |

# che si traduce nel grafico




Si vede chiaramente che la legge è di tipo lineare:

$$\text{legge: } x \text{ (in g)} \longrightarrow 2x \text{ (in cm)}$$

**Domanda**:
se si appende una locomotiva di quanto si allunga la molla?

Risposta stupida: dipende da quanti grammi pesa la locomotiva;
Risposta giusta: la molla si spezza.

**Commento**:
una legge matematica deve essere applicata con intelligenza, al minimo valutando entro quali limiti è applicabile.

# Il problema degli antenati

Ogni persona ha due genitori, eventualmente definendo madre colei che ha fornito l'ovulo e padre colui che ha fornito gli spermatozoi.

Poiché l'italiano non ha parole sufficienti per definire gli antenati, chiameremo

A1 i genitori di una persona,
A2 i genitori dei genitori di una persona (nonni),
A3 i genitori dei genitori dei genitori di una persona (bisnonni),
e così via.

Si ha la tabella

| **Generazioni** | **Quanti sono** |
|---|---|
| Persona | $1 = 2^0$ |
| A1 | $2 = 2^1$ |
| A2 | $4 = 2^2$ |
| A3 | $8 = 2^3$ |
| A4 | $16 = 2^4$ |
| … | … |
| An | $2^n$ |

Fin qui niente di strano, ma …

… se si calcolano tre generazioni ogni secolo, la tabella diventa

| Generazioni | Quanti sono | Secoli fa |
|---|---|---|
| Persona | $1 = 2^0$ | 0 |
| A3 | $8 = 2^3$ | 1 |
| A6 | $2^6 = 64$ | 2 |
| A9 | $2^9= 512$ | 3 |
| A12 | $2^{12} = 512$ | 4 |
| A15 | $2^{15} = 4096$ | 5 |
| … | … | … |
| A30 | 1'073'741'824 | 10 |
| … | … | … |
| A60 | $1{,}15 \cdot 10^{16}$ | 20 |

Cioè: ai tempi di Gesù di Nazareth vivevano
più di 10 milioni di miliardi di antenati
di una persona oggi vivente.

Evidentemente c’è qualcosa che non va.

Basta pensare che tre fratelli non hanno 6 genitori.

Il risultato paradossale in questo caso è evidente, ma deve metterci sull'avviso quando si fanno previsioni o valutazioni **esclusivamente** sulla base di modelli matematici.

I demografi stimano che ai tempi di Gesù di Nazareth la popolazione mondiale fosse di circa 200’000’000 di persone.

200 milioni è lo 0,000’002 % di 10 milioni di miliardi ed è da questa piccolissima percentuale che discendono tutti i quasi otto miliardi di persone che oggi abitano il pianeta.

Conclusione: siamo tutti parenti o, per dirla all’inglese:

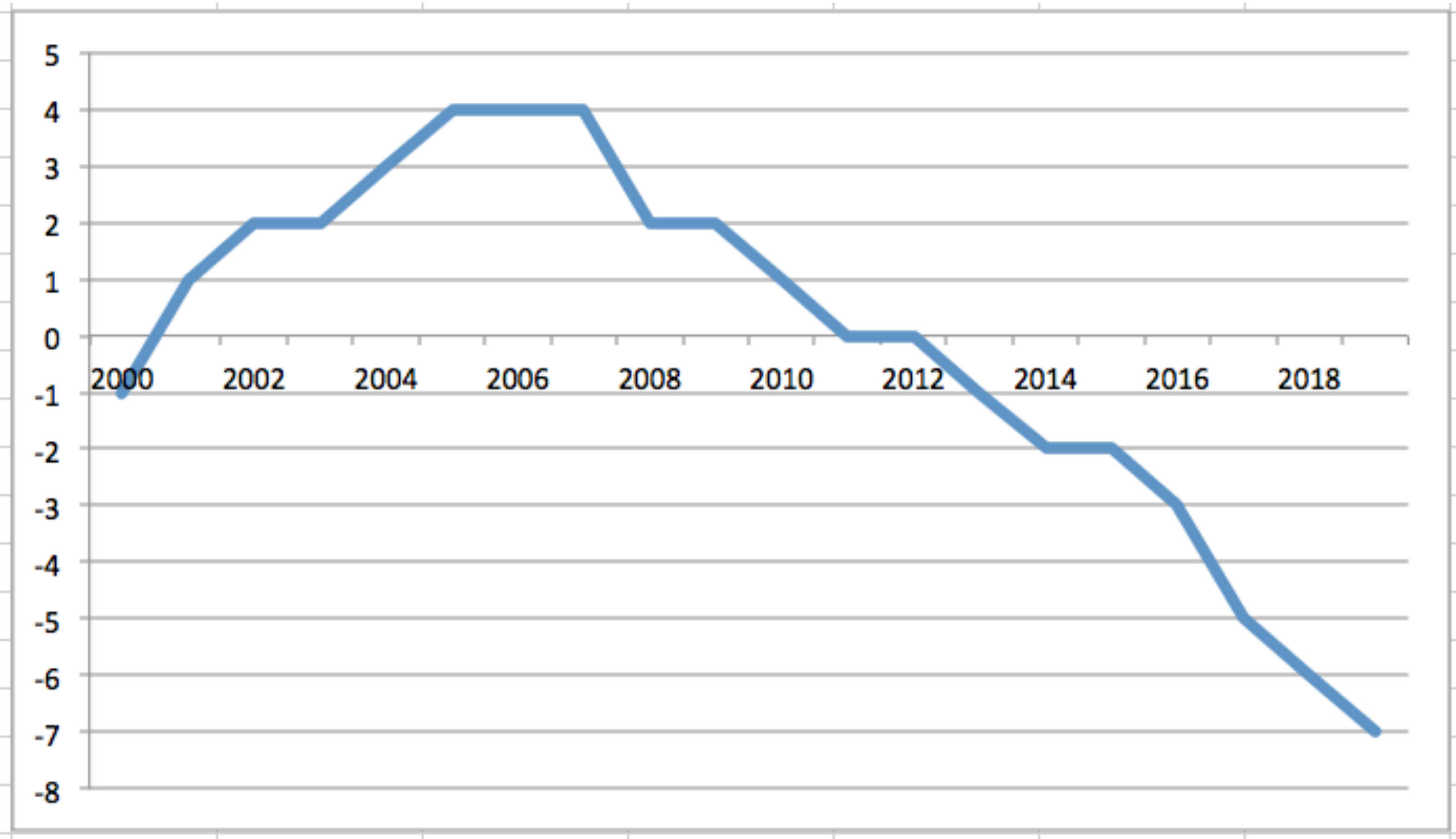
Every baby is a royal baby

Abbiamo visto alcune situazioni:

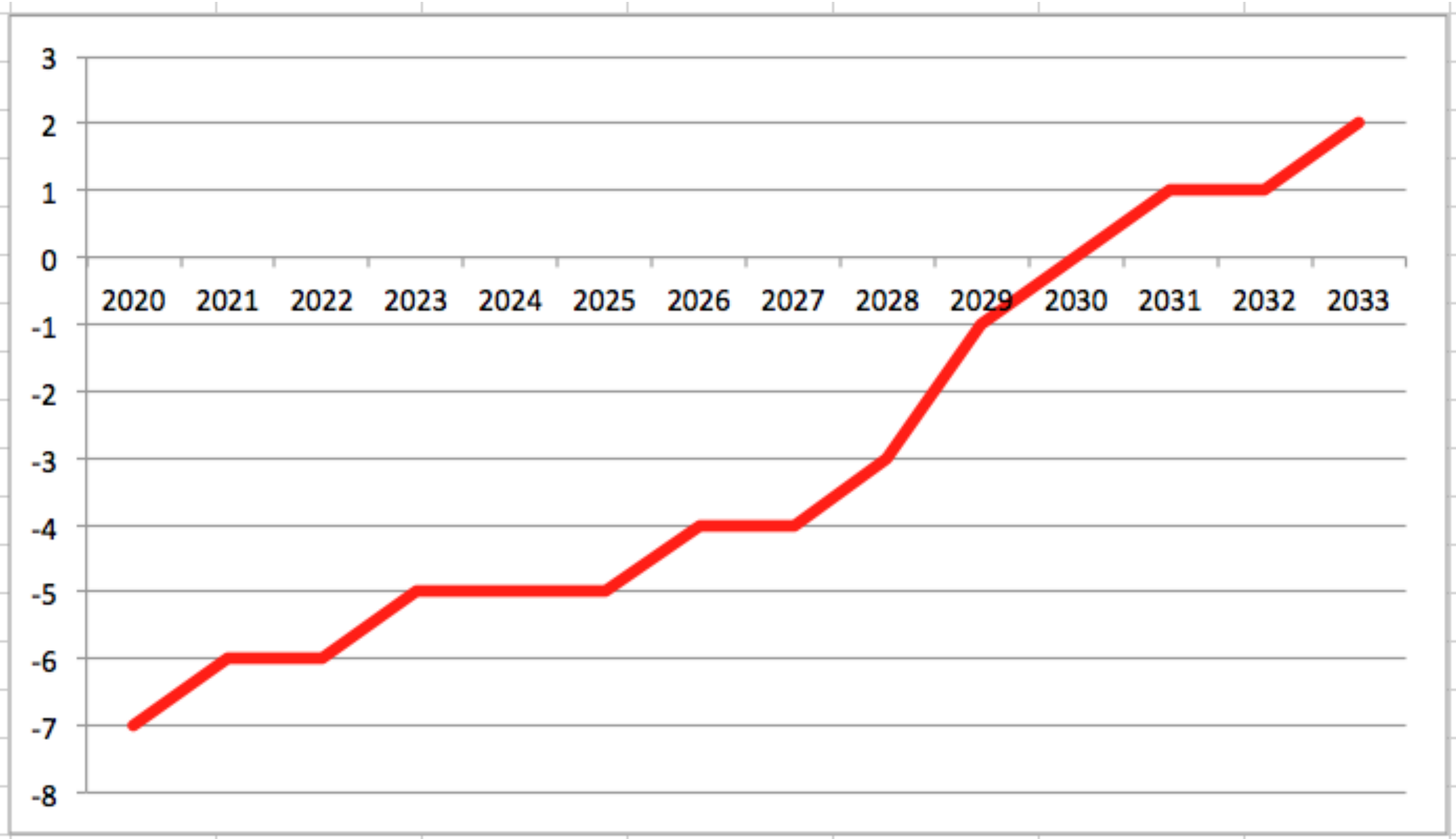
- sembrava così e invece…
- le previsioni funzionavano fino a un certo punto poi più
- casi che sembravano simili si sono dimostrati in realtà diversi
- i risultati si sono rivelati una sorpresa

Adesso vi presento un caso ipotetico invitandovi a decidere come trattarlo:
la vostra decisione resterà un vostro segreto.

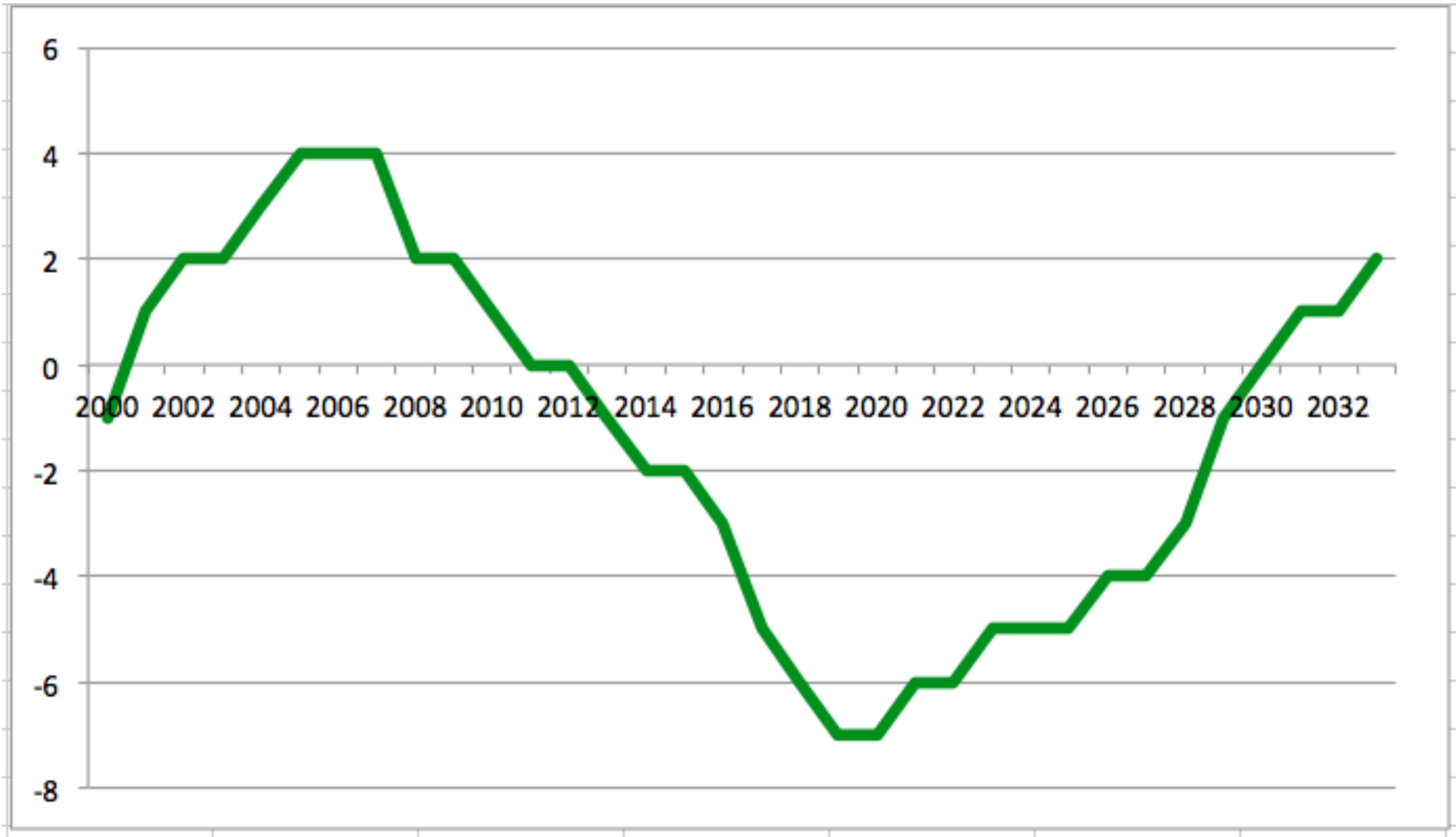
# Situazione attuale



# Previsione


3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
2020
2021
2022
2023
2024
2025
2026
2027
2028
2029
2030
2031
2032
2033

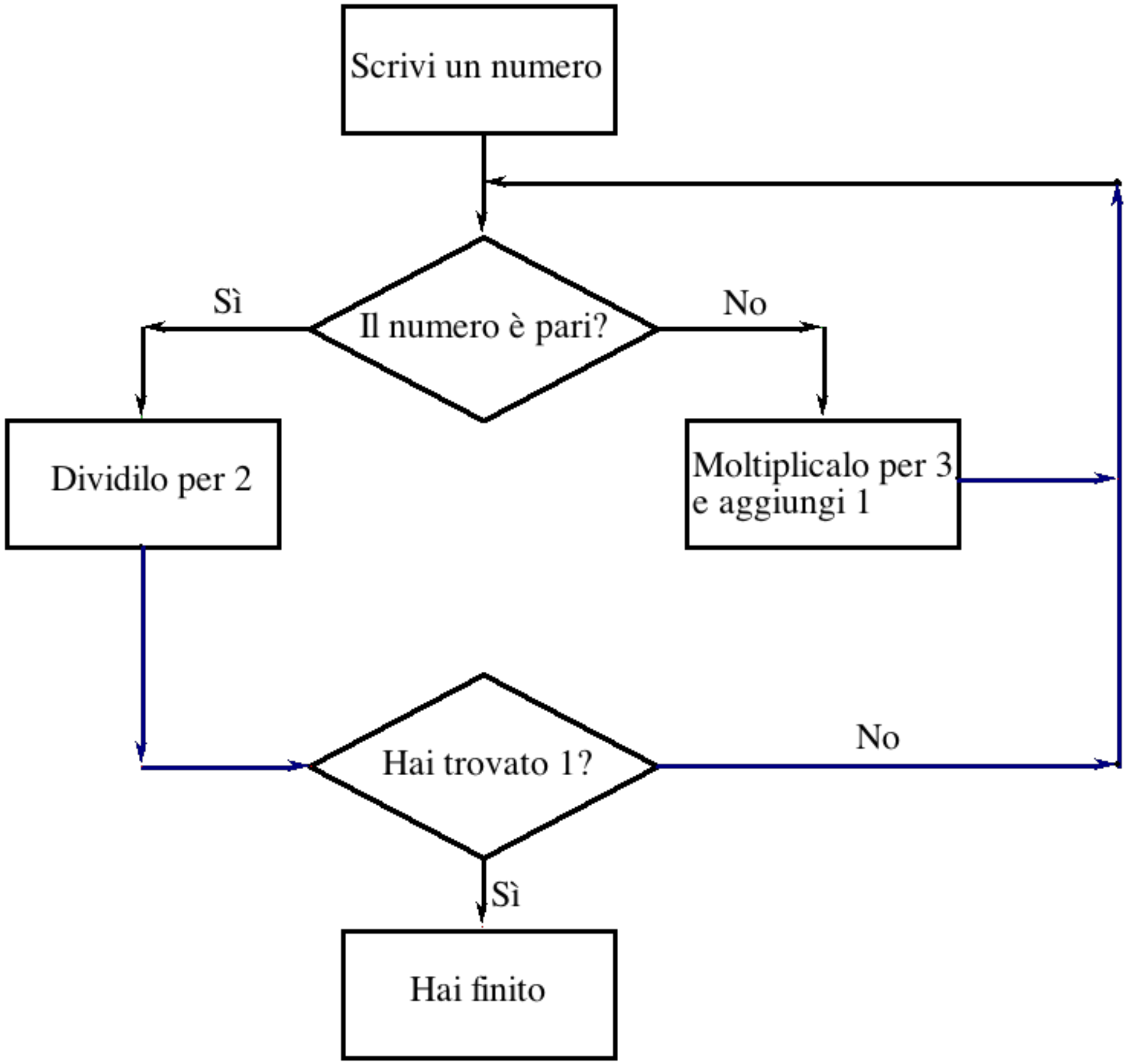
# Situazione attuale con previsione



“Come curiosità sarà proposto un problema facilmente comprensibile ma la cui soluzione non è ancora stata trovata:

il matematico Paul Erdős ha messo in palio 500 $ che saranno versati a chi per primo pubblicherà la soluzione.”

# La congettura di Collatz



# Qualche esempio

| **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **27** | **40** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 2 | 16 | 3 | 22 | 4 | 28 | 5 | 82 | 20 |
| 5 | 1 | 8 | 10 | 11 | 2 | 14 | 16 | 41 | 10 |
| 16 | | 4 | 5 | 34 | 1 | 7 | 8 | 124 | 5 |
| 8 | | 2 | 16 | 17 | | 22 | 4 | 62 | 16 |
| 4 | | 1 | 8 | 52 | | 11 | 2 | 31 | 8 |
| 2 | | | 4 | 26 | | 34 | 1 | 94 | 4 |
| 1 | | | 2 | 13 | | 17 | | 47 | 2 |
| | | | 1 | 40 | | 52 | | 142 | 1 |
| | | | | 20 | | 26 | | 71 | |
| | | | | 10 | | 13 | | 214 | |
| | | | | 5 | | 40 | | 107 | |
| | | | | 16 | | 20 | | 322 | |
| | | | | 8 | | 10 | | 161 | |
| | | | | 4 | | 5 | | 484 | |
| | | | | 2 | | 16 | | 242 | |
| | | | | 1 | | 8 | | 121 | |
| | | | | | | 4 | | 364 | |
| | | | | | | 2 | | 182 | |
| | | | | | | 1 | | ... | |
| | | | | | | | | ... | |
| | | | | | | | | ... | |
| | | | | | | | | 1 | |

# Grazie per l'attenzione

Giorgio Mainini

giorgio.mainini@ticino.com