

Matematica e arte

Leonardo Pisano

noto come

Fibonacci

Giorgio Mainini, SMASI



Calcolare da "alla romana" ...

Memmio Aurelio Titurio è un romano figlio di Placidio, ricco commerciante di granaglie che opera tra la Mezzaluna Fertile e Roma. Come tale ha un istruttore privato, ovviamente schiavo greco, di nome Antipatro. Quando Memmio raggiunge i dodici anni, Antipatro decide che è abbastanza maturo da essere introdotto ai misteri del calcolo aritmetico. Per prima cosa gli insegna che I vuol dire uno, II vuol dire due, e così tre e quattro, ma che cinque si scrive V, sei VI, sette VII, ma che dieci si scrive X, poi, via via, ventotto XXVIII, cinquanta L, cento C, cinquecento D e mille M.

"Più di cinquemila", dice Antipatro, "non capita quasi mai, quindi lascia perdere. D'altronde nella mia lingua μυριάς, che deriva da μύριοι, cioè diecimila, vuol dire 'tantissimo'".

Dopo un po' di esercizi di scrittura di numeri, Antipatro entra nel vivo, e chiede a Memmio di calcolare quanto si avrà in tasca se si aggiungono XXXVIII sesterzi ai LXXVII che già si possiedono.

Ecco come l'allievo risolse il problema:

XXXVIII aggiunto a LXXVII fa LXXXV IIII, sostituendo: LLXV e infine CXV.

Sì, Memmio aveva il pallino per l'aritmetica...

Venendo più vicino a noi, quando l'edificio di Lugano in cui ha sede il Municipio aveva 72 anni, che anno era?

Sul frontone dell'edificio si legge

AERE CIVIVM CONDITVM ANNO MDCCCXXXIV



Si veda come è scritto il 40 e come il 4: il 40 è scritto con il metodo additivo; il 4, invece, con il metodo sottrattivo ($5 - 1$)¹.

Eseguiamo il calcolo come Memmio:

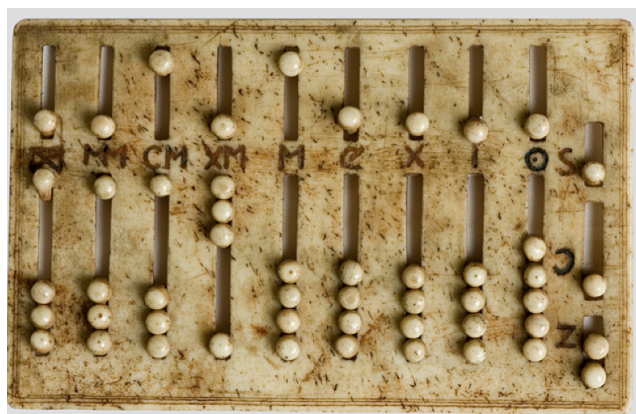
LXXII aggiunto a MDCCCXXXIII fa MDCCC L XXXXX X IIII I, sostituendo:

MDCCC LL XVI, sostituendo ancora: MDCCCXVI (o, adottando anche il metodo sottrattivo, M DCCCC XVI diventa M CM XVI, MCMXVI).

Si immagini come sarebbe complicato moltiplicare o dividere...

In realtà, è lecito supporre che non si calcolasse "alla Memmio" ma che si usasse uno strumento di calcolo, l'**abaco**, che avrebbe potuto avere il seguente aspetto:

¹ Nel progetto originale dell'arch. Giacomo Moraglia (Milano, 1791 – Milano, 1860) era scritto MDCCCXXXIII. Oltre al Palazzo civico di Lugano, Moraglia progettò in Ticino anche il Teatro sociale di Bellinzona, la chiesa di San Carlo e la villa Ghisler di Magadino.



da <http://blogs.elspectador.com/actualidad/catrecillo/el-misterio-de-los-numeros/attachment/abacoromano-jpg>

Le ultime due colonne a destra sono anomale, forse indicano parti di qualcosa (pesi, lunghezze, monete, ...), mentre le quattro a sinistra fanno pensare a un abaco tardivo, visto il modo di indicare le unità oltre le migliaia.

Per una introduzione all'uso dell'abaco si veda qui

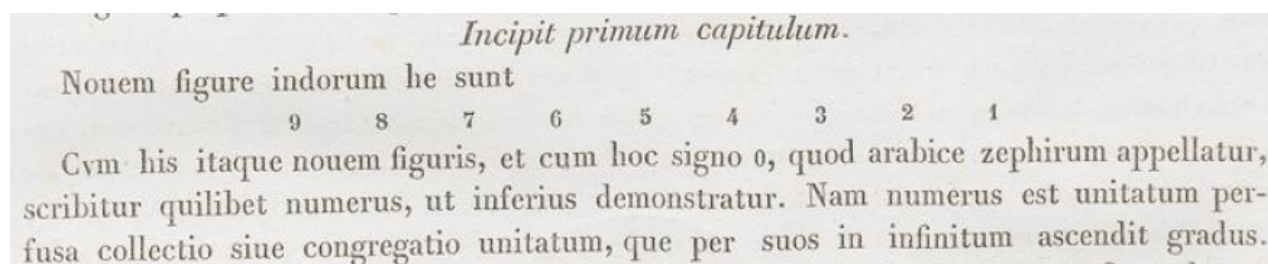
<https://www.wikihow.it/Usare-un-Abaco>

... "alla araba"

Fino al XII secolo nell'Europa occidentale l'abaco la faceva da padrone assoluto fin che, nel 1202, Leonardo Pisano figlio di Bonaccio, noto come **Fibonacci**², pubblicò il *Liber abaci*, in 4 parti per 15 capitoli, con il quale insegnò ad usare le cifre indo-arabe.

Dal *Liber abaci*, in una ristampa del 1857³

pagina 2:



(Le nove figure degli indiani sono queste: 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Con queste nove figure, e con questo simbolo, 0, che in arabo si chiama zephir, si può scrivere qualsiasi numero, come è dimostrato più sotto. Infatti un numero è una collezione formata di unità, o una schiera di unità, che secondo il suo grado sale fino all'infinito).

² Pisa, 1175 ca. – Pisa, 1235 ca. Il nome Fibonacci fu inventato nel 1838 da Guglielmo Libri, personaggio interessante sotto vari aspetti. V. <https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci> e https://it.wikipedia.org/wiki/Guglielmo_Libri_Carucci_dalla_Sommaja

³ Il testo completo è scaricabile da <https://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/10607990>, (ca. 120 MB)

Introductiones in ac ditione (sic) et multiprichatione numerorum											
2 et 2 fiunt 4			Ianua sexcenarii			60 et 60 fiunt 120			De Quinario		
2	3	5	7	7	14	60	70	130	5 uices 5 fiunt 5		
2	4	6	7	8	15	60	80	140			
2	5	7	7	9	16	60	90	150			
2	6	8	7	10	17	70 et 70 fiunt 140			5	6	30
2	7	9	8 et 8 fiunt 16			70	80	150	5	7	35
2	8	10	8	9	17	70	90	160	5	8	40
2	9	11	8	10	18	80 et 80 fiunt 160			5	9	45
2	10	12	9 et 9 fiunt 18			80	90	170	5	10	50
Ianua tornarii			9	10	19	et fiunt			De senario		
3 et 3 fiunt 6			10 et 10 fiunt 20			90	90	180	6 uices 6 fiunt 36		
3	4	7	20 et 20 fiunt 40			Explicunt inactiones			6	7	42
3	5	8	20	30	50	Incipiunt multiplicationes			6	8	48
3	6	9	20	40	60	De binario			6	9	54
3	7	10	20	50	70	2 uices 2 fiunt 4			6	10	60
3	8	11	20	60	80	2	3	6	De sexcenario		
3	9	12	20	70	90	2	4	8			
3	10	13	20	80	100	2	5	10	7 uices 7 fiunt 49		
Ianua quaternarii			20	90	110	2	6	12	7	8	56
4 et 4 fiunt 8			30 et 30 fiunt 60			2	7	14	7	9	63
4	5	9	30	40	70	2	8	16	7	10	70
4	6	10	30	50	80	2	9	18	De octonario		
4	7	11	30	60	90	2	10	20			
4	8	12	30	70	100	De tornario			8 uices 8 fiunt 64		
4	9	13	30	80	110	3 uices 3 fiunt 9			8	9	72
4	10	14	30	90	120	3	4	12	8	10	80
Ianua Quinario			40 et 40 fiunt 80			3	5	15	De nonario		
5 et 5 fiunt 10			40	50	90	3	6	18			
5	6	11	40	60	100	3	7	21	9 uices 9 fiunt 81		
5	7	12	40	70	110	3	8	24	9	10	90
5	8	13	40	80	120	3	9	27	De decenario		
5	9	14	40	90	130	3	10	30			
5	10	15	40	100	140	De quaternario			10 uices 10 fiunt 100		
Ianua senarii			50 et 50 fiunt 100			4 uices 4 fiunt 16			10	20	200
6 et 6 fiunt 12			50	60	110	4	5	20	Explicunt multiplicationes		
6	7	13	50	70	120	4	6	24			
6	8	14	50	80	130	4	7	28			
6	9	15	50	90	140	4	8	32			
6	10	16				4	9	36			
						4	10	40			

Dove si vede che Fibonacci dà per scontata la proprietà commutativa dell'addizione e della moltiplicazione.

Si noti che, se si seguissero le indicazioni di Fibonacci, la tavola pitagorica assumerebbe questo aspetto:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3		9	12	15	18	21	24	27	30
4			16	20	24	28	32	36	40
5				25	30	35	40	45	50
6					36	42	48	54	60
7						49	56	63	70
8							64	72	80
9								81	90
10									100

con un notevole risparmio di memoria (del 55% !).

Fibonacci descrive poi i metodi di esecuzione (algoritmi) delle quattro operazioni. Nell'addizione scrive il risultato sopra gli addendi, da cui il nome "somma" (*summus*, *a*, *um*: il più in alto) del risultato stesso.

Dopo aver trattato del calcolo con le frazioni, propone un bel numero di problemi di vario tipo e la soluzione di questioni diverse, dette miscellanee – ([*solutio*] *questionum quas erraticas appellamus*).

Infine tratta la regola della doppia falsa posizione, il calcolo delle radici quadrate e cubiche, i binomi, le regole delle proporzioni geometriche e le questioni di algebra e almucabala⁴.

Qui ci interessa uno dei problemi delle miscellanee (pag. 283):

Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur.
 Quidam posuit unum par coniculorum in quodam loco, qui erat undique pariete circundatus, ut sciret, quot ex eo paria germinarentur in uno anno: cum natura eorum sit per singulum mensem aliud par germinare; et in secundo mense ab eorum natiuitate germinant. Quia suprascriptum par in primo mense germinat, duplicabis ipsum,

⁴ Le ultime due parole derivano dal titolo del libro *Al-kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wa'l-muqabala* (Breve opera sul calcolo di riempire e bilanciare) del matematico arabo Abu Jafar Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, 780 ca. – 850 ca., dalla cui *nisba* deriva il termine "algoritmo". *al-jabr* (letteralmente: completamento, riempimento; in latino *restauratio*), corrisponde ad eliminare i termini negativi, aggiungendo termini uguali nei due membri; *al-muqabala* (messa in opposizione, bilanciamento; in latino *oppositio*) consente di aggiungere i termini simili nei due membri. Mentre la parola "algebra" ha assunto un significato via via più esteso ed è giunta fino a noi, "almucabala" è caduta in disuso verso il XV secolo.

(Quante coppie di conigli discendono in un anno da una sola coppia.

Un tale mise una coppia di conigli in un luogo completamente circondato da un muro, per scoprire quante coppie di conigli sarebbero state generate da questa in un anno: per natura le coppie di conigli generano ogni mese un'altra coppia e cominciano a procreare a partire dal secondo mese dalla nascita. [...])

Ed ecco la soluzione di Fibonacci:

Poiché la suddetta coppia si riproduce nel primo mese, devi raddoppiarla: nel primo mese le coppie saranno 2.

Di queste, la prima, nel secondo mese ne genera un'altra: quindi nel secondo mese ci sono 3 coppie.

Di queste, durante il mese, due si riproducono e nel terzo mese, generano 2 coppie: quindi, nel terzo mese, ci sono 5 coppie di conigli.

Di queste, durante il mese, 3 si riproducono e nel quarto mese ci sono 8 coppie.

Di queste, al quinto mese, 5 coppie ne generano altre 5 che aggiunte alle 8 coppie esistenti fanno 13 coppie.

Di queste, le 5 generate nel mese precedente non generano nel sesto mese, ma le altre 8 si riproducono, quindi nel sesto mese ci sono 21 coppie.

Aggiungendo a queste altre 13 coppie generate nel settimo mese, ci saranno in quel mese 34 coppie.

Aggiungendo a queste altre 21 coppie generate nell'ottavo mese, ci saranno in quel mese 55 coppie.

Aggiungendo a queste, altre 34 coppie generate nel nono mese, ci saranno in quel mese 89 coppie.

Aggiungendo nuovamente a queste altre 55 coppie generate, nel decimo ci saranno 144 coppie.

Aggiungendo nuovamente a queste altre 89 coppie generate nell'undicesimo mese, ci saranno in quel mese 233 coppie.

Aggiungendo nuovamente a queste anche 144 coppie generate nell'ultimo mese, ci saranno 377 coppie.

Tante sono le coppie generate dalla coppia iniziale in quel luogo in capo ad un anno.

Il ragionamento iniziale non è chiaro: se comincia a procreare a partire dal primo mese, bisogna immaginare che la prima coppia sia nata un mese prima dell'inizio dell'esperimento. Tagliamo la testa al toro e assumiamo che la prima coppia aspetti un mese prima di riprodursi. In tal caso il numero delle coppie cresce secondo la tabella

Mese	1 gen	2 feb	3 mar	4 apr	5 mag	6 giu	7 lug	8 ago	9 set	10 ott	11 nov	12 dic
Coppie	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144 ⁵

L'interesse della successione nella seconda riga è dato dall'osservazione che, dati i primi due numeri, ogni altro è dato dalla somma dei due che lo precedono. Lasciando i conigli nel loro recinto, si può continuare la successione all'infinito. Ecco come continua:

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	...
233	377	610	987	1597	2584	4181	6765	10946	17711	...

⁵ A voler essere pignoli, la soluzione è 143, perché la prima coppia non è "generata" ma messa nel recinto dal "tale" di cui nella formulazione del problema.

In termini formali, la successione può essere definita nel seguente modo:

$$\text{Fib}(1) = 1 \quad ; \quad \text{Fib}(2) = 1 \quad ; \quad \text{Fib}(n) = \text{Fib}(n-2) + \text{Fib}(n-1)$$

Una proprietà della successione di Fibonacci

Ecco che cosa capita se si divide ogni numero per il suo predecessore (seconda colonna) e ogni numero per il suo successore:

1		1
1	1	0.5
2	2	0.666666667
3	1.5	0.6
5	1.666666667	0.625
8	1.6	0.615384615
13	1.625	0.619047619
21	1.615384615	0.617647059
34	1.619047619	0.618181818
...	...	...
46368	1.618033988	0.618033989
75025	1.618033989	0.618033989
121393	1.618033989	0.618033989
196418	1.618033989	0.618033989
...	...	...
514229	1.618033989	0.618033989
832040	1.618033989	0.618033989
...	...	...

Sembra proprio che a partire da un certo punto

- i rapporti si stabilizzino e
- i rapporti delle due colonne differiscano di 1.

In realtà non solo **sembra**: si può dimostrare che è **davvero così**.

Un'altra proprietà della successione di Fibonacci

Che cosa capiterebbe se si generalizzasse mettendo altri numeri al posto dei primi due 1?

Ecco:

2		0.4	3.17		0.465491924
5	2.5	0.714285714	6.81	2.148264984	0.682364729
7	1.4	0.583333333	9.98	1.465491924	0.594401429
12	1.714285714	0.631578947	16.79	1.682364729	0.627194621
19	1.583333333	0.612903226	26.77	1.594401429	0.614554637
31	1.631578947	0.62	43.56	1.627194621	0.619365847
50	1.612903226	0.617283951	70.33	1.614554637	0.617525683
...	...	...	...	...	...
178707	1.618033989	0.618033989	251298.04	1.618033989	0.618033989
289154	1.618033989	0.618033989	406608.77	1.618033989	0.618033989
...	...	...	...	...	...

Insomma, i numeri 1.618033989 e 0.618033989 saltano fuori ancora, indipendentemente dai primi due numeri scelti. In realtà i due numeri sono 1.618033988... e 0.618033988...: quelli trovati dipendono da approssimazioni introdotte dal programma di calcolo usato.

Ma che numeri sono?

Si può dimostrare che (vedi dopo)

$$1.618033988... = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$$

e che

$$0.618033988... = \varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$$

dove φ è un numero dai tanti nomi: **sezione aurea**, **rapporto aureo**, **numero aureo**, **proporzione divina** o **costante di Fidia**, di cui φ è l'iniziale.

Ancora un'altra proprietà della successione di Fibonacci

Se si prendono in considerazione tre numeri successivi di Fibonacci a caso, per esempio

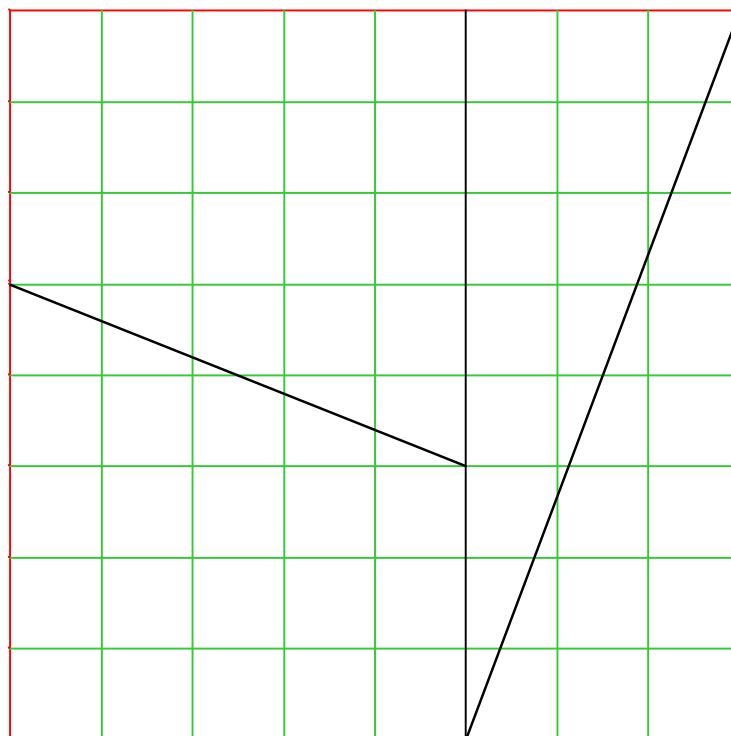
2 ; 3 ; 5 oppure 8 ; 13 ; 21 oppure 34 ; 55 ; 89 oppure 55 ; 89 ; 144

si può osservare che

$$2 \times 5 = 3^2 + 1 \quad 8 \times 21 = 13^2 - 1 \quad 34 \times 89 = 55^2 + 1 \quad 55 \times 144 = 89^2 - 1$$

cioè: il prodotto del primo e del terzo differisce di 1 o di -1 dal quadrato del secondo.

Questa proprietà permette un giochino di magia. Eccolo:



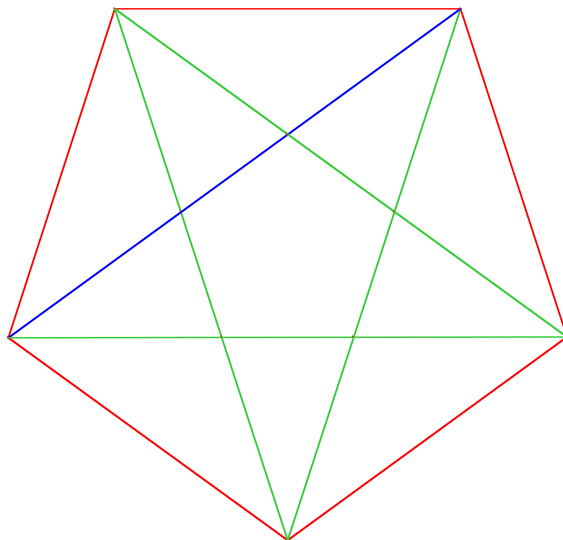
L'area del quadrato è di 64 quadratini. Se lo si taglia lungo le righe nere e si ricompongono i quattro pezzi per formare un rettangolo, il rettangolo ha (sembra avere) un'area di 65 quadratini!

Un po' di storia

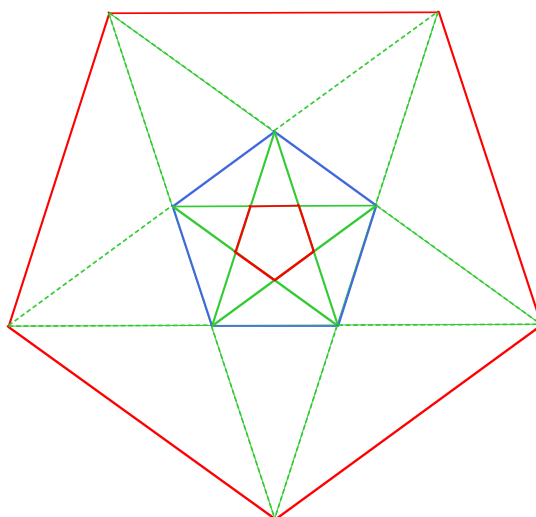
Secondo alcuni studiosi si trovano tracce della sezione aurea già a Babilonia nel periodo tra il IX e VI secolo a.C. Altri ne vedono presso gli Egizi sotto la XIX dinastia (XIII secolo a.C.). Prove

certe però non ve ne sono. Presso i Greci se ne occuparono in particolare **Pitagora**⁶ studiando il pentagono regolare e **Euclide**⁷ definendola nel XIII libro dei suoi famosi Elementi "divisione di un segmento in ultima e media ragione" (*ἄκρος καὶ μέσος λόγος*).

Pitagora



Il rapporto tra le misure della diagonale blu e del lato rosso è φ . Naturalmente si può dire la stessa cosa del pentagono regolare che si è formato al centro, e la faccenda diventa vertiginosa:



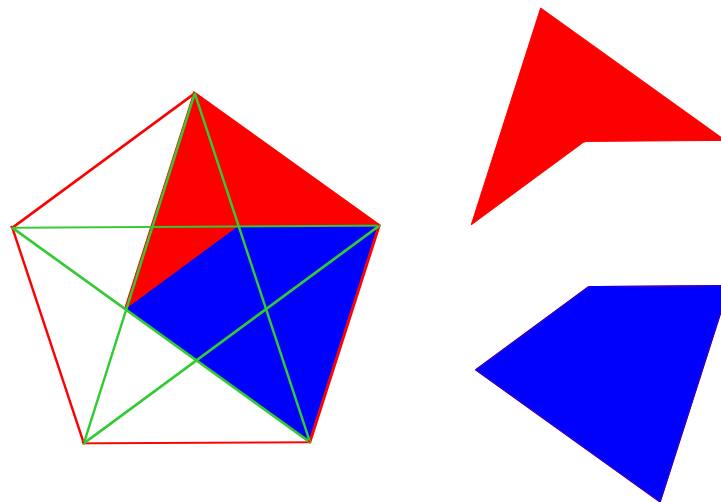
all'infinito⁸.

⁶ Samo, tra il 580 a.C. e il 579 a.C. – Metaponto, 495 a.C. ca.

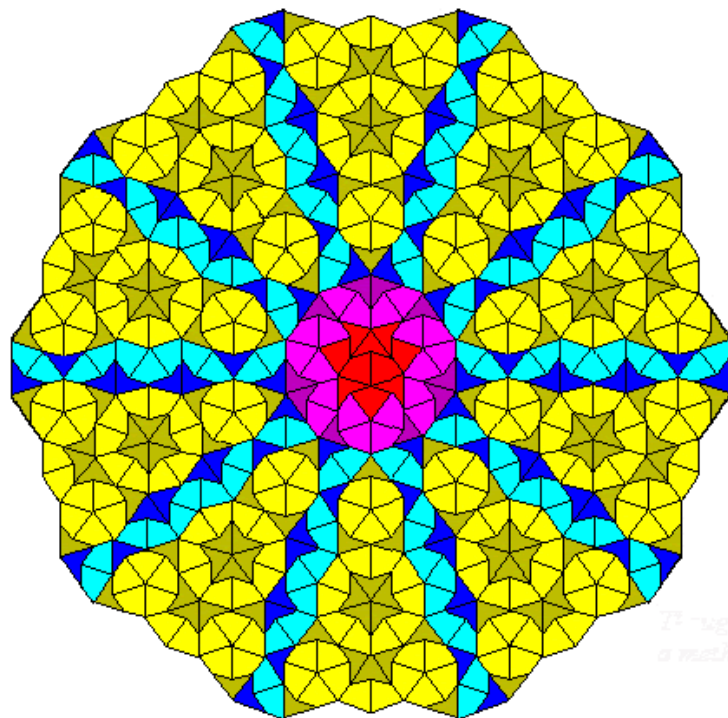
⁷ Di lui si sa pochissimo. Fu attivo ad Alessandria durante il regno di Tolomeo I, 323–283 a.C.

⁸ Il pentagono regolare si è visto a più riprese durante i giochi olimpici invernali di PyeongChang, febbraio 2018. Penso che dipenda dall'emblema della Corea del Sud (Vedi https://it.wikipedia.org/wiki/Emblema_della_Corea_del_Sud)
 Addirittura, nel logo delle Olimpiadi è stata forzata la simmetria esagonale dei fiocchi di neve, trasformata in simmetria pentagonale.

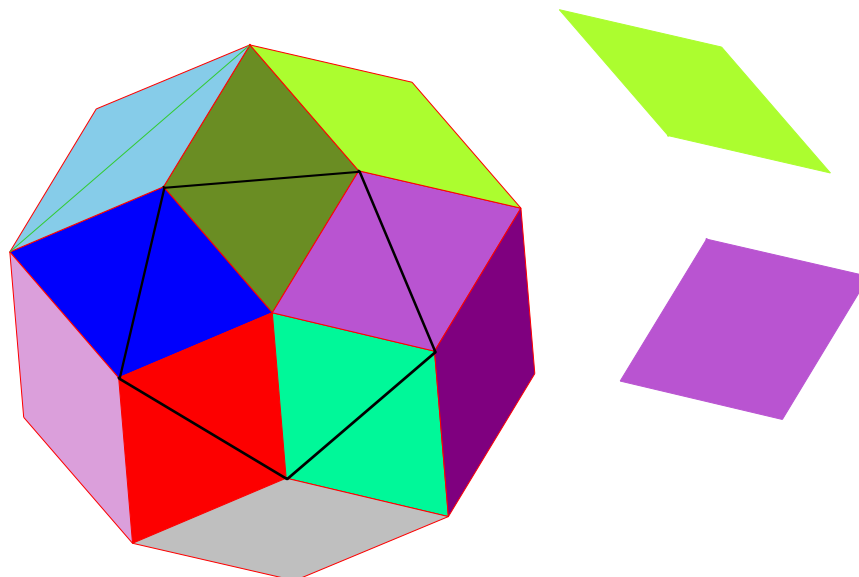
A partire dal pentagono regolare si possono costruire le due figure rossa e blu, dette freccia e aquilone,



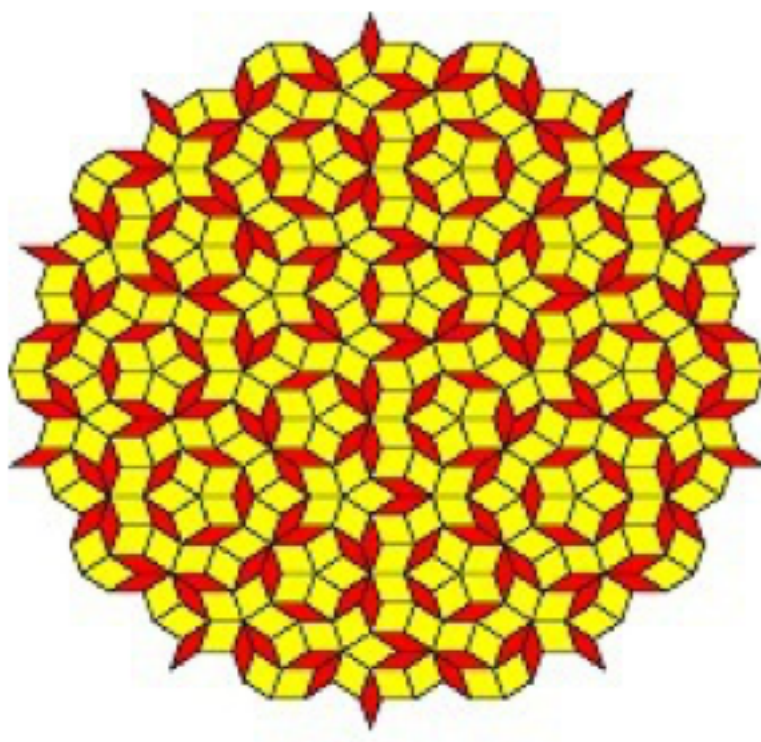
che possono essere accostate ottenendo figure come la seguente



o queste altre due, i due rombi verdino e viola



che, a loro volta, possono generare figure come la seguente

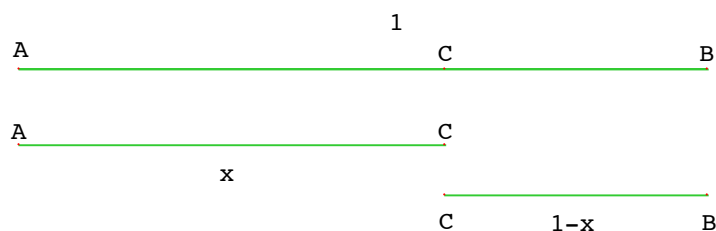


Le due coppie di figure generano le cosiddette tassellazioni (o pavimentazioni) di Penrose⁹

⁹ Sir Roger Penrose, Colchester 1931

Euclide

Vuole dividere un segmento AB, che possiamo immaginare lungo 1 in una qualche unità di misura, in due parti AC e CB, in modo che il rapporto tra le misure del segmento e della parte maggiore sia uguale a quello tra la parte maggiore e quella minore:



Si ha l'equazione (vedi l'Appendice)

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$

Che ha due soluzioni, una positiva e l'altra negativa. Quella positiva è

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\varphi} \approx 0.61803398...$$

e il rapporto fra la misura di tutto il segmento, 1, e la parte maggiore, $\frac{1}{\varphi}$, è

$$\frac{1}{\frac{1}{\varphi}} = \varphi = \frac{1}{0.61803398...} \approx 1.61803398...$$

Fibonacci

Fibonacci non si accorge della tendenza del rapporto verso φ , ma fa notare che ogni numero a partire dal terzo è la somma dei due che lo precedono e che si potrebbe ben continuare dopo il dodicesimo mese (*et sic posses facere per ordinem de infinitis numeris mensibus*) esprimendo a parole quel tipo di definizione che in seguito sarà chiamato **ricorsivo**:

$$\text{Fib}(1) = 1 \quad ; \quad \text{Fib}(2) = 1 \quad ; \quad \text{Fib}(n) = \text{Fib}(n-2) + \text{Fib}(n-1)$$

In sostanza una definizione ricorsiva funziona così:

- si dice come calcolare l'n-esimo termine a partire da uno o più termini precedenti;
- per calcolare i termini precedenti si deve partire da uno o più loro precedenti;
- per calcolare i loro precedenti si deve partire da uno o più loro precedenti;
-
- prima o poi si arriva a uno o più termini noti e da quelli si risale a trovare i loro successori.
-

Nel caso di Fibonacci vogliamo calcolare Fib(4), che già sappiamo essere 3.

Applicando la formula ricorsiva si ha

$$\text{Fib}(4) = \text{Fib}(2) + \text{Fib}(3) = 1 + \text{Fib}(3)$$

$$\text{Fib}(3) = \text{Fib}(1) + \text{Fib}(2) = 1 + 1 = 2$$

$$\text{Fib}(4) = 1 + 2 = 3$$

Certo che calcolare $\text{Fib}(100)$ con questo metodo in pratica non è uno scherzo ma ciò che conta è che funziona, specialmente se si usano un computer e un *software* di calcolo che accetti funzioni ricorsive, e se si ha la pazienza di aspettare che il computer trovi il risultato (nel caso di $\text{Fib}(100)$ qualcuno ha calcolato che occorra circa un miliardo di anni - Zellini P., 2018, “La dittatura del calcolo”).

L'introduzione delle cifre indo-arabe in Europa non fu facile, forse anche per l'opposizione dei professionisti dell'abaco che temevano di perdere il lavoro, come difatti avvenne. Interessante l'immagine *Typus Arithmeticae*, dal *Margarita Philosophica* di Gregor Reisch¹⁰ del 1504.



Per la Svizzera si veda <http://www.hls-dhs-dss.ch/textes/i/I13752.php>

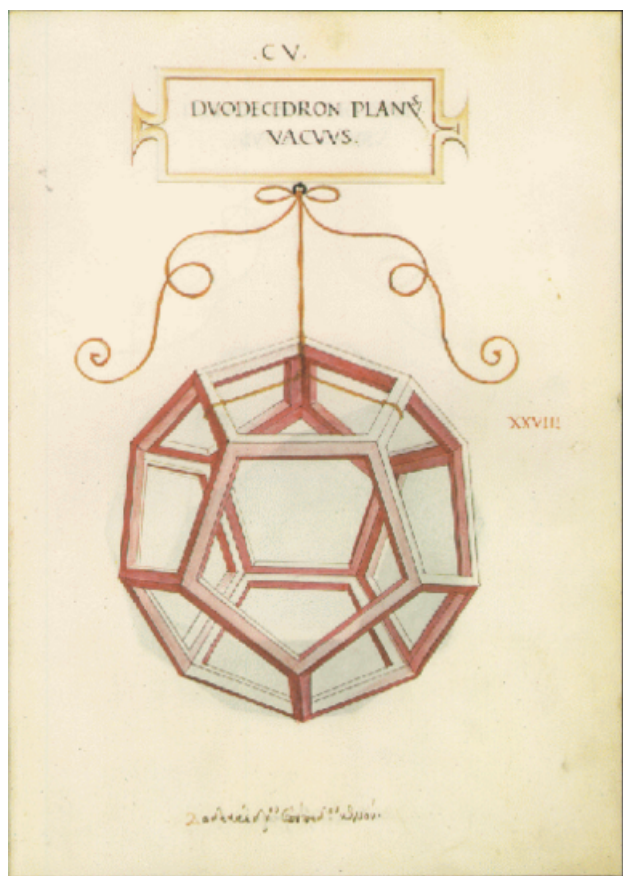
Luca Pacioli¹¹

Nel suo *De divina proportione* (1509, con fantastici disegni di/attribuiti a Leonardo da Vinci) sostituisce la vecchia dizione euclidea con la nuova *divina proportione*, ma neanche lui si accorge delle oramai due note proprietà. Si accorge invece, come forse già i pitagorici, per i quali la scoperta dovette essere traumatica, che φ è un numero irrazionale.

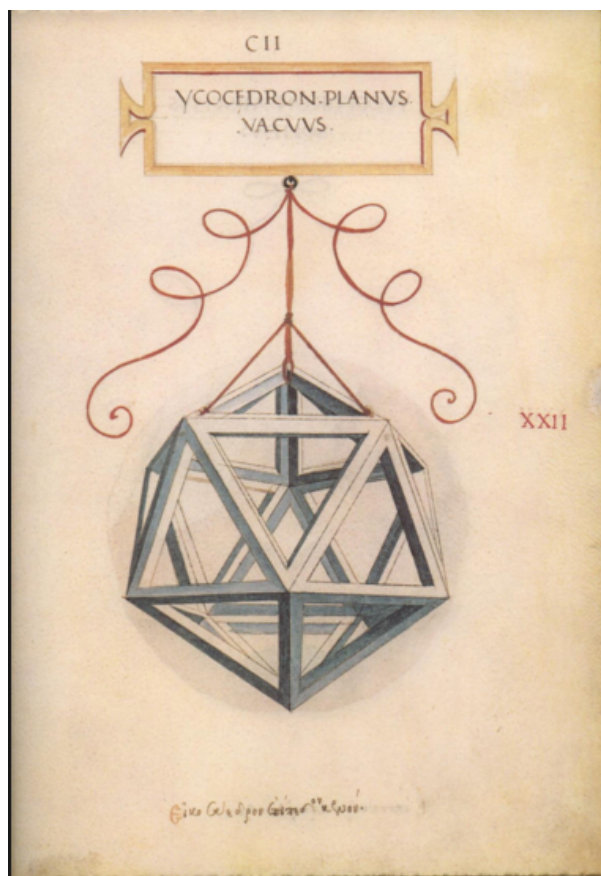
Attenzione alle parole: *irrazionale* non vuol dire *irragionevole*, ma *che non può essere espresso come un rapporto (ratio, λόγος) fra due numeri interi*.

¹⁰ Balingen, 1467 ca. – Friburgo in Brisgovia, 1525

¹¹ Borgo Sansepolcro, 1445 ca. – Roma, 1517



Dodecaedro cavo



Icosaedro cavo

Keplero¹²

Johannes von Kepler è il primo a scoprire la tendenza a φ e associò il numero alla sua concezione dell'architettura dell'universo: la definizione di *divina* si prestava dunque molto bene. Per lui tanto bastava, e non si preoccupò di dimostrare la tendenza.

Robert Simson¹³

Fu il primo a dimostrare che i rapporti tendono a φ .

Jacques Binet¹⁴

A lui si deve la scoperta della formula non ricorsiva per calcolare l'n-esimo termine della successione di Fibonacci senza calcolare tutti i precedenti.

Ecco la formula di Binet:

$$\text{Fib}(n) = \frac{\varphi^n - (1 - \varphi)^n}{\sqrt{5}}$$

Il bello della formula è che, pur contenendo due numeri irrazionali, φ e $\sqrt{5}$, per ogni valore di n (intero) genera un numero intero cioè, appunto, un numero di Fibonacci.

¹² Weil der Stadt, 1571 – Ratisbona, 1630

¹³ Kirktonhall 1687 - Glasgow 1768

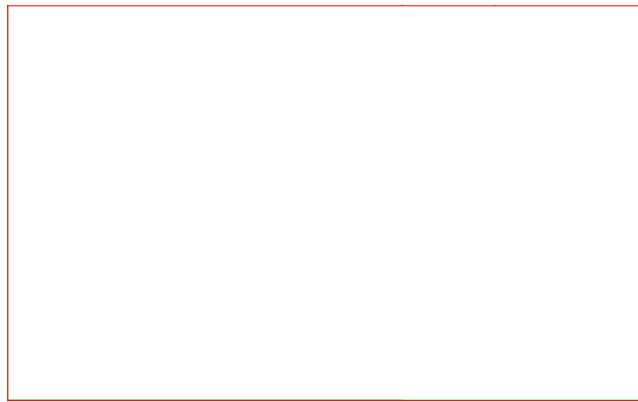
¹⁴ Rennes, 1786 – Parigi, 1856

Chi volesse verificare la correttezza della formula di Binet, per esempio con un foglio di calcolo, potrebbe procedere così:

- apre un nuovo foglio di calcolo
- in una cella, poniamo B2, mette la formula $= (1 + \text{RADQ}(5))/2$ per calcolare φ ;
- in un'altra cella, diciamo D2, mette 1
- in D3 mette $= D2 + 1$
- copia la formula in D3 in basso fin che vuole
- in E2 mette $= (B\$2^{D2} - (1 - B\$2)^{D2}) / \text{RADQ}(5)$
- copia la formula in E2 in basso fin che vuole.

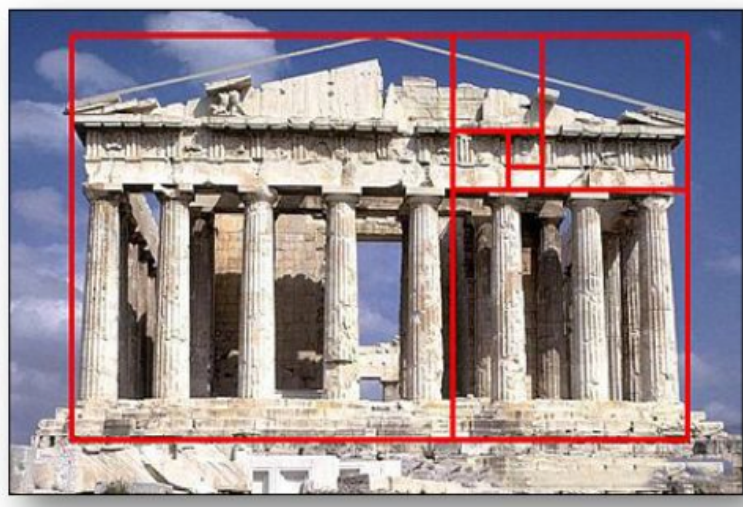
Nella colonna E vedrà come per magia nascere i numeri di Fibonacci.

Vista la sezione aurea, conviene dare un'occhiata al rettangolo aureo, nel quale il lato minore è la sezione aurea del maggiore.

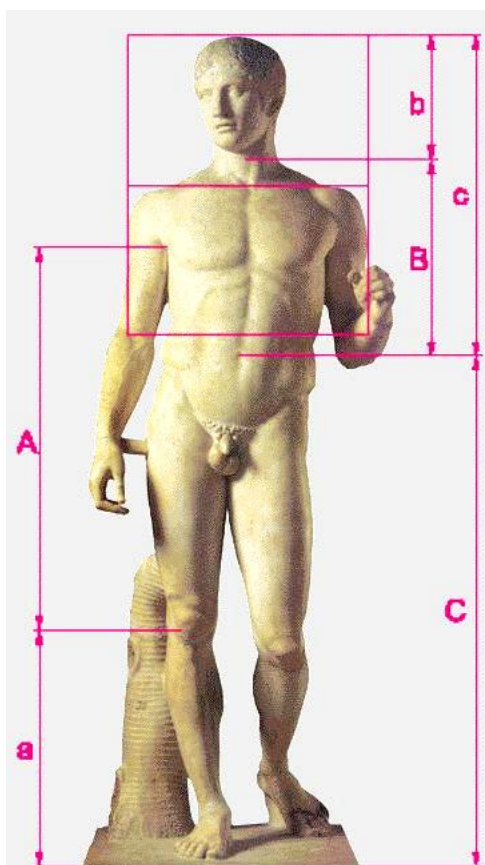


La successione nell'arte

Forse...



il Partenone di Atene, rettangolo aureo?



il Doriforo di Policleto ¹⁵, sezione aurea?

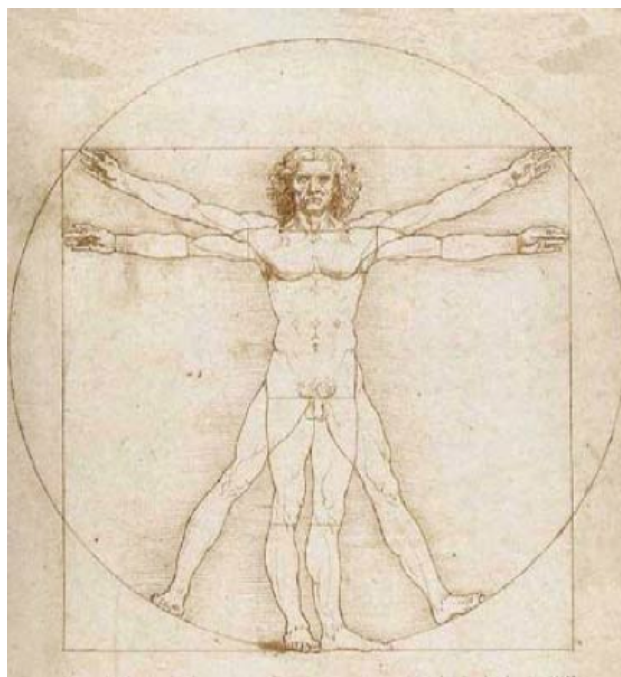


Arco di Costantino ¹⁶, rettangolo aureo?

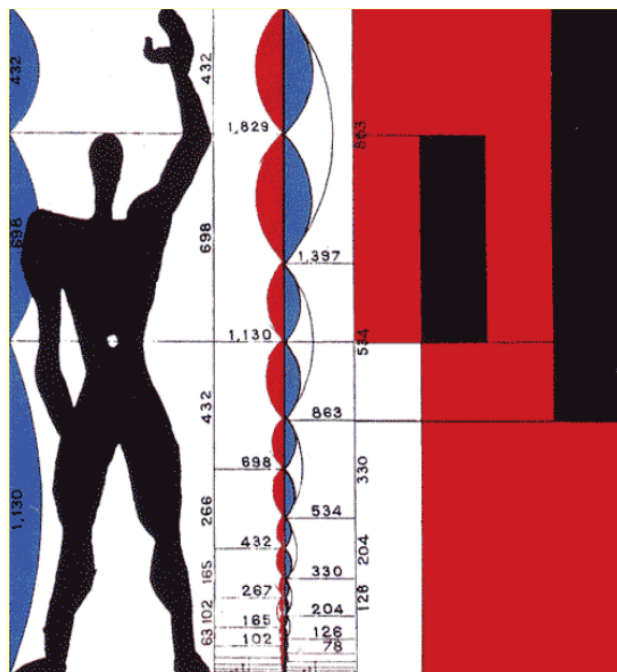
¹⁵ V secolo a.C.

¹⁶ Naissus, 274 – Nicomedia, 337

Certo...



Uomo Vitruviano, Leonardo da Vinci ¹⁷



Modulor, Le Corbusier ¹⁸



L'Ultima cena, Salvador Dalì ¹⁹

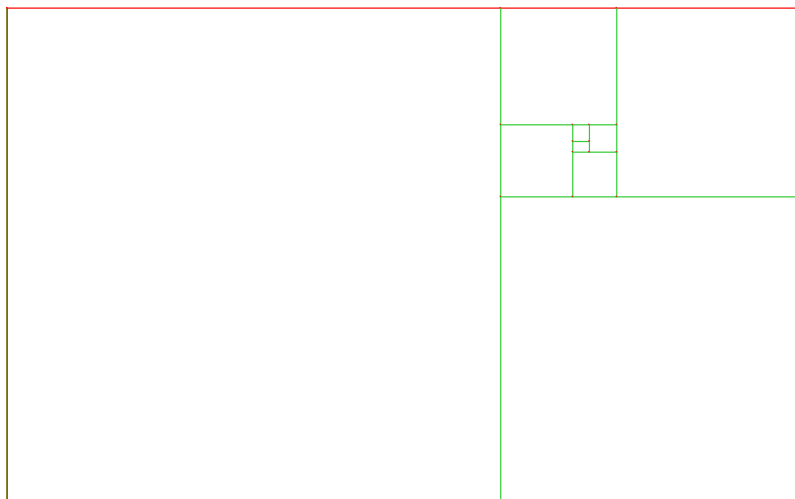
¹⁷ Anchiano, 1452 – Amboise, 1519

¹⁸ Charles-Edouard Jeanneret-Gris (La Chaux-de-Fond, 1887 – Roquebrune Cap Martin, 1965)

¹⁹ Figueres, 11 maggio 1904 – Figueres, 23 gennaio 1989

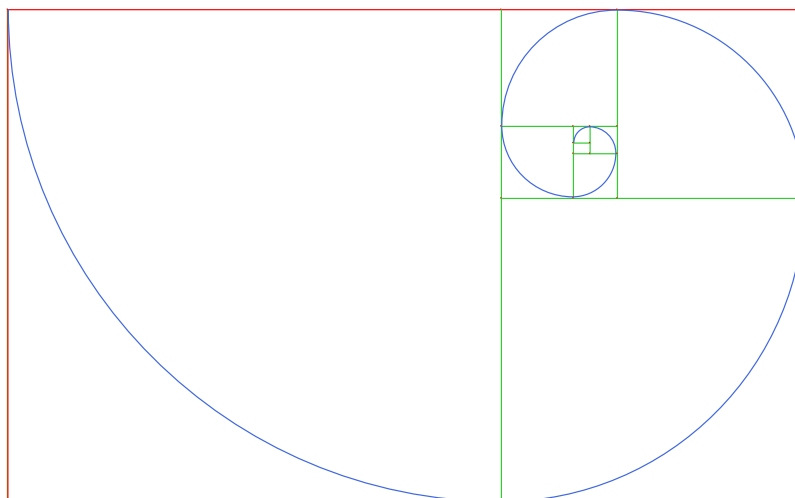
Ancora sul rettangolo aureo

Come scritto sopra, nel rettangolo rosso il lato minore è la sezione aurea del maggiore.
Se da un rettangolo aureo si toglie un quadrato il cui lato è uguale al lato minore del rettangolo, il rettangolo che rimane è ancora aureo. Di conseguenza si può continuare all'infinito a togliere quadrati da ogni nuovo rettangolo, così:



Non è proibito pensare a Piet Mondrian ²⁰, senza esagerare nel trarre conclusioni.

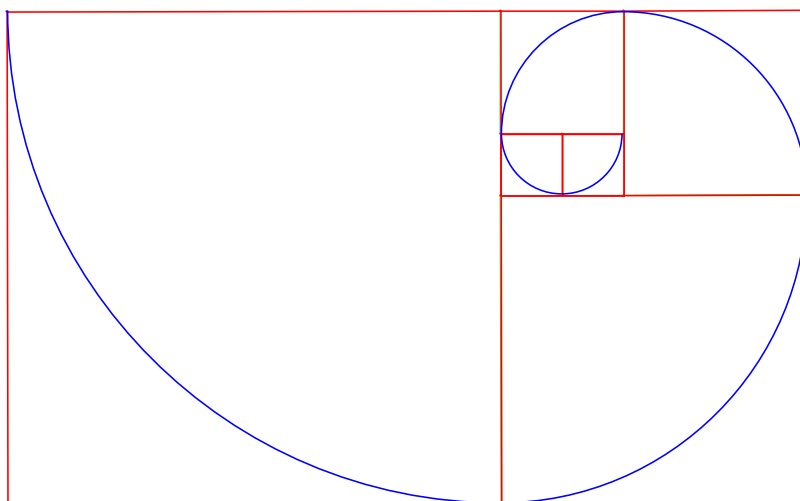
Nei quadrati appena ottenuti si possono inscrivere dei quarti di circonferenza, ed ecco che nasce una buona approssimazione della **spirale logaritmica**:



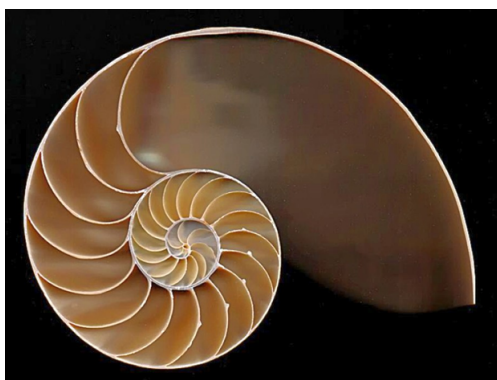
Si noti che la spirale si avvolge su se stessa all'infinito, tendendo a un punto che non raggiungerà mai.

²⁰ Amersfoort, 1872 – New York, 1944

Un'altra approssimazione, meno buona, della spirale logaritmica si può ottenere direttamente da una rappresentazione geometrica dei numeri di Fibonacci.



La spirale logaritmica in natura



Conchiglia di Nautilus



Girasole



Broccolo romano



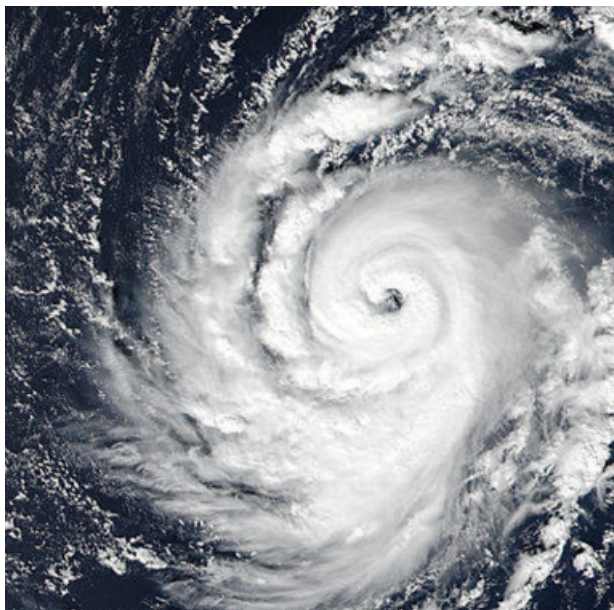
Pianta grassa



Cavalluccio marino



Camaleonte



Uragano Ophelia, 2017



Galassia a spirale NGC 1232

La spirale logaritmica nell'arte



Capitello ionico



Capitello corinzio



Albero della vita, Gustav Klimt²¹



Spirale, Giò Pomodoro²²



La grande onda di Kanagawa, Hokusai²³



Spirale sulla tomba di Jakob Bernoulli²⁴

²¹ Baumgarten, 1862 – Vienna, 1918

²² Orciano di Pesaro, 1930 – Milano, 2002

²³ Edo (oggi Tokyo), 1760 – Edo, 1849

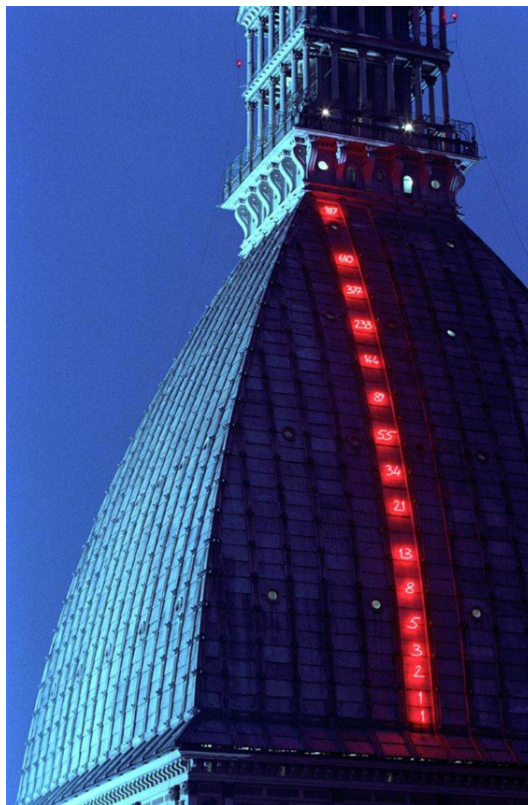
²⁴ Basilea, 1654 – Basilea, 1705

Particolare della tomba



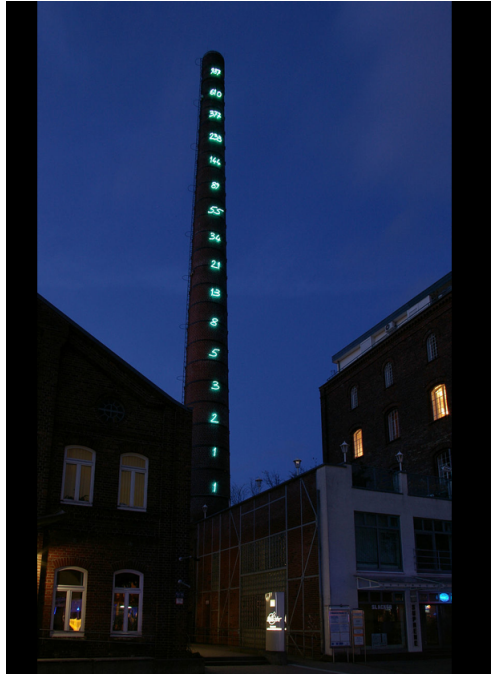
È evidente che la spirale non è logaritmica ma di un altro tipo (archimedeo). Bernoulli voleva che vi fosse incisa la *spira mirabilis*, come l'aveva chiamata lui, ma lo scalpellino si confuse...

Arte matematica

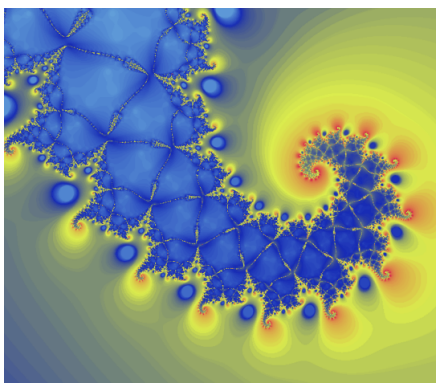
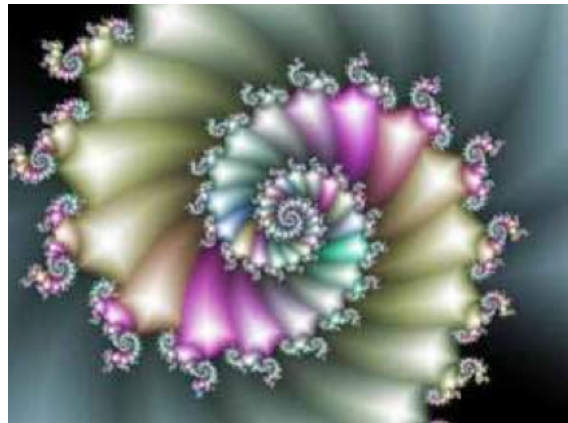


Mario Merz²⁵, installazione sulla Mole Antonelliana

²⁵ Milano, 1925 – Milano, 2003



Mario Merz, installazione al
Centre for International Art, Unna



Frattali

Chi volesse avere informazioni sui frattali potrebbe cominciare da qui
<https://it.wikipedia.org/wiki/Frattale>

Appendice

L'equazione

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$

con le soluzioni

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

risolve il problema della sezione aurea, ma non quello della determinazione del valore limite del rapporto tra un numero di Fibonacci e il suo precedente.

Una soluzione semplificata può essere la seguente.

Diamo per buono (sperimentalmente, anche se si può dimostrare) che quel limite esista e che non dipenda dalla scelta dei primi due numeri. Possiamo allora scegliere di assumere come primo numero 1 e come secondo il valore limite cercato, che chiameremo x . Si ha la successione:

1 ; x ; $1+x$; $1+2x$; $2+3x$; $3+5x$; ...

Ma x è il numero per il quale moltiplicare ogni numero di Fibonacci per ottenere il suo successivo. Di conseguenza la successione è **anche** quest'altra:

1 ; x ; x^2 ; x^3 ; x^4 ; ...

Di conseguenza si ha, per definizione,

$$x^2 = 1 + x \quad \text{sia} \quad x^3 = x + x^2 \quad \text{sia} \quad x^4 = x^2 + x^3 \quad \text{e così via.}$$

Siccome $x \neq 0$, tutte le equazioni si possono trasformare nella prima, risolvendo la quale si ottengono le due soluzioni

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

con

$$x_1 = 1.618033988... \quad \text{e} \quad x_2 = -0.618033988...$$

Siccome x_1 è l'unica soluzione positiva, è quello il valore limite cercato, il medesimo numero che è il rapporto (irrazionale) tra la misura di un segmento e quella della sua sezione aurea.

È però interessante costruire una successione "similfibonacci" SFib così definita:

$$\text{SFib}(1) = \text{SFib}(2) = -0.618033988... \quad ; \quad \text{SFib}(n) = \text{SFib}(n-2) + \text{SFib}(n-1)$$

e confrontarla con la successione Fib.