L’arte del pensiero

Giochiamo e ragioniamo in modo combinatorio

Gianfranco Arrigo
SMASI Lugano
NRD Bologna

smasi
società matematica della svizzera italiana

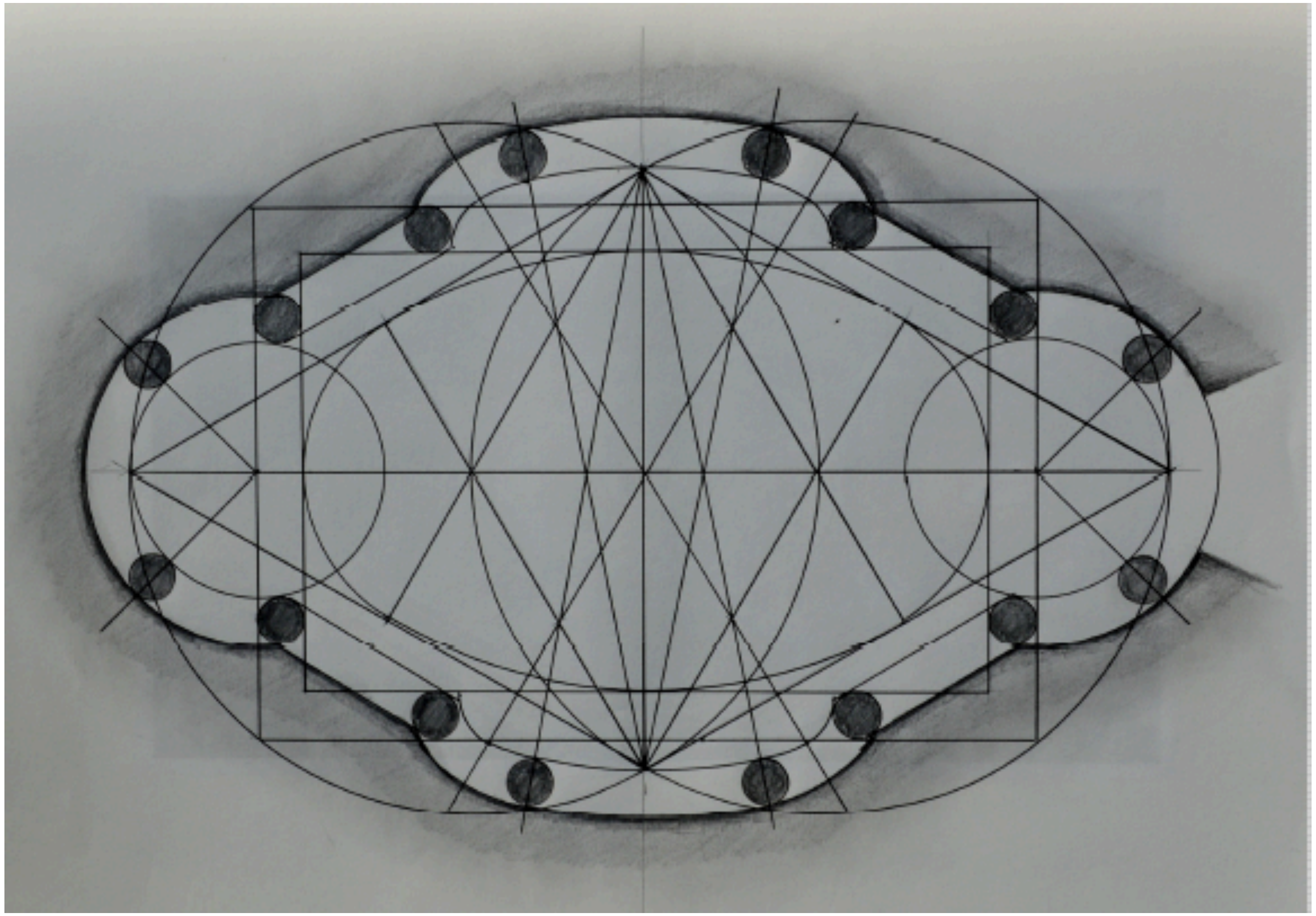
Arte combinatoria

Dallo Zingarelli:
arte combinatoria, tecnica studiata da Leibniz (1646-1716) per derivare concetti complessi dalla combinazione di altri semplici, considerati come primitivi (…)

Combinatoria geometrica
chiesa di San Carlo alle Quattro Fontane, Roma
Francesco Borromini (XVII secolo)
(detta anche San Carlino)

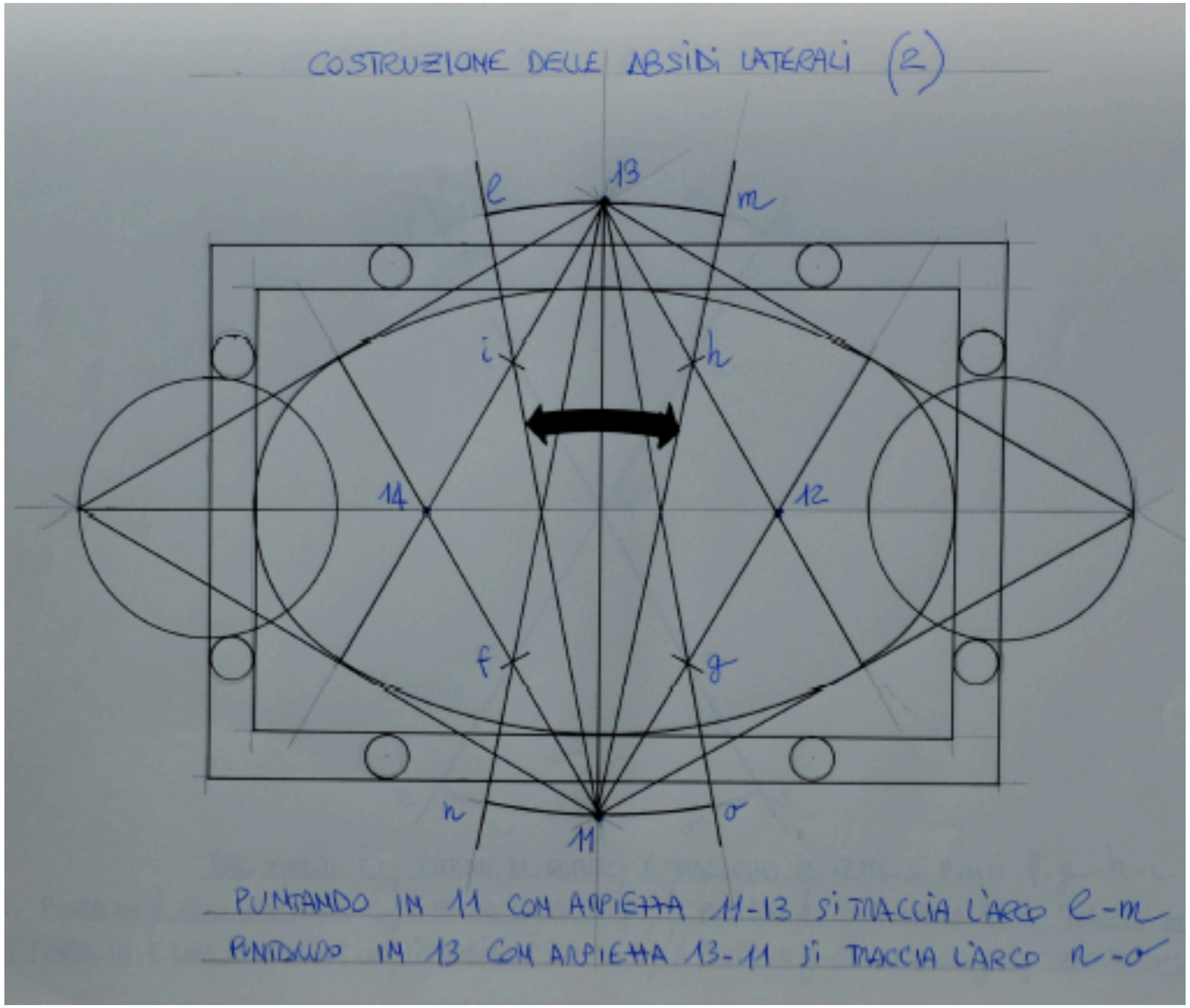
Elaborazione geometrica

di Lorenzo Bocca, Cremona



Elaborazione geometrica

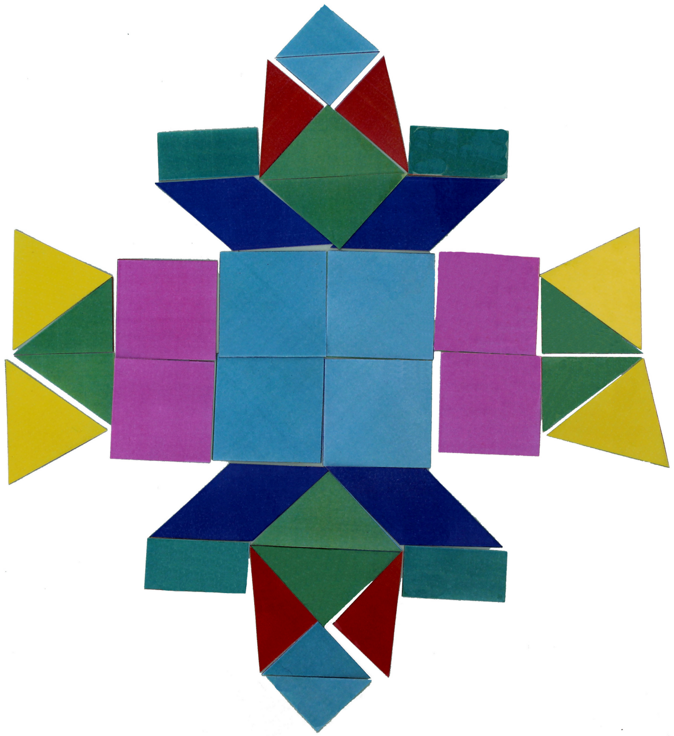
di Lorenzo Bocca, Cremona



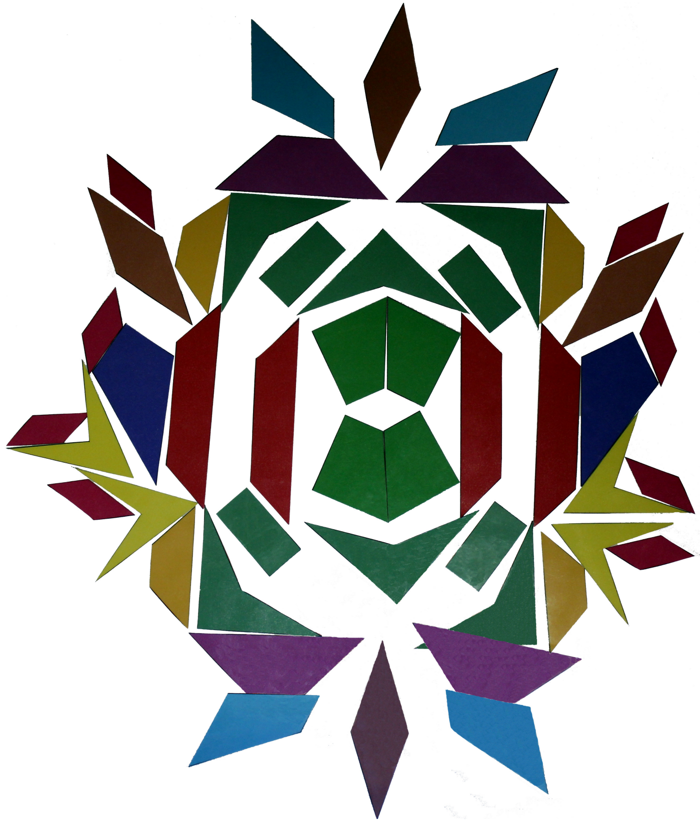
Composizione ispirata al racconto
"La Biblioteca di Babele" di J.L. Borges
Lorenzo Bocca, Cremona

Composizioni simmetriche

eseguite da alunni delle prime classi della scuola elementare
Pomeriggi di animazione matematica, SMASI

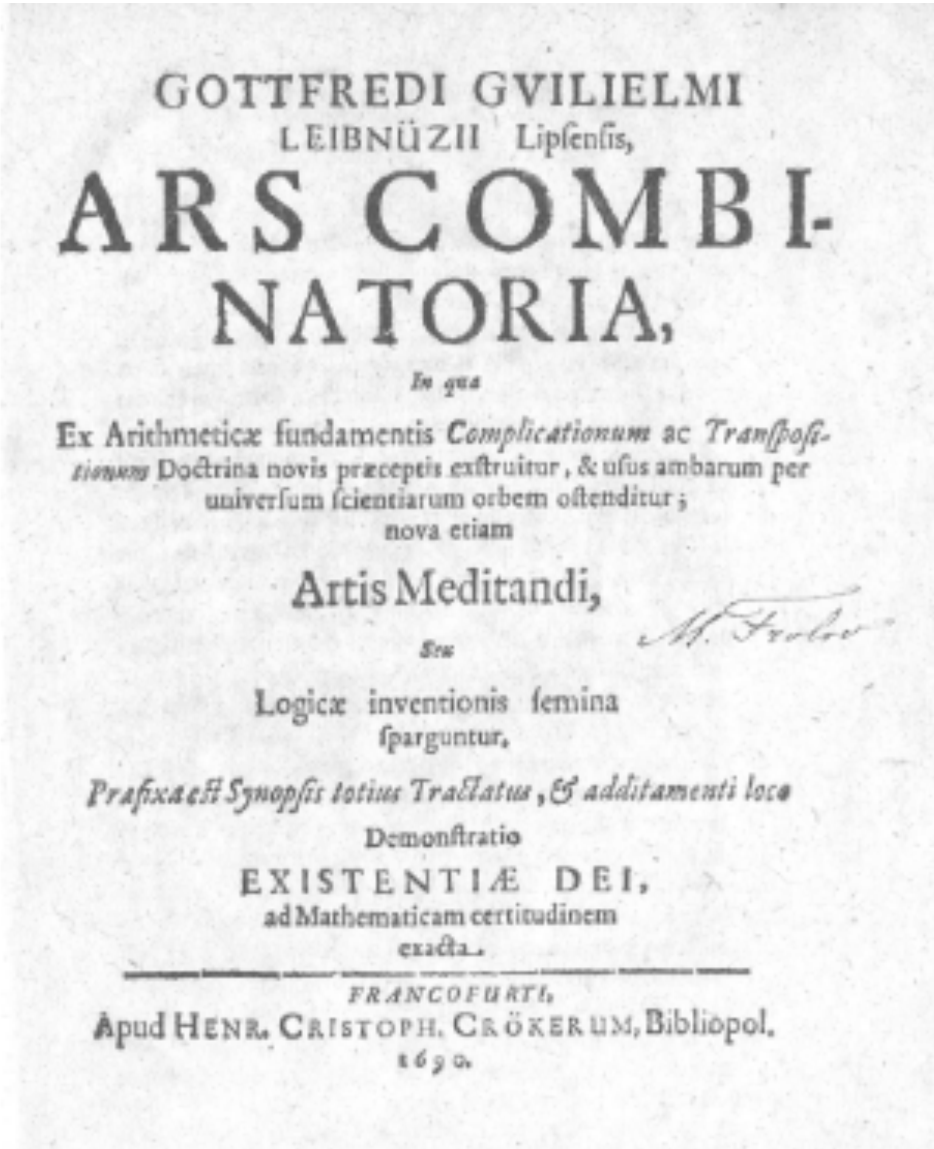


SE Ruvigliana



SE Pregassona

Letteratura combinatoria



GOTTFREDI GVILIELMI
LEIBNÜZII Lipſenſis,

ARS COMBI-
NATORIA,

In qua

Ex Arithmeticæ fundamentis *Complicationum* ac *Tranſpoſi-
tionum* Doctrina novis præceptis exſtruitur, & uſus ambarum per
univerſum ſcientiarum orbem oſtenditur;
nova etiam

Artis Meditandi,

M. Frolov

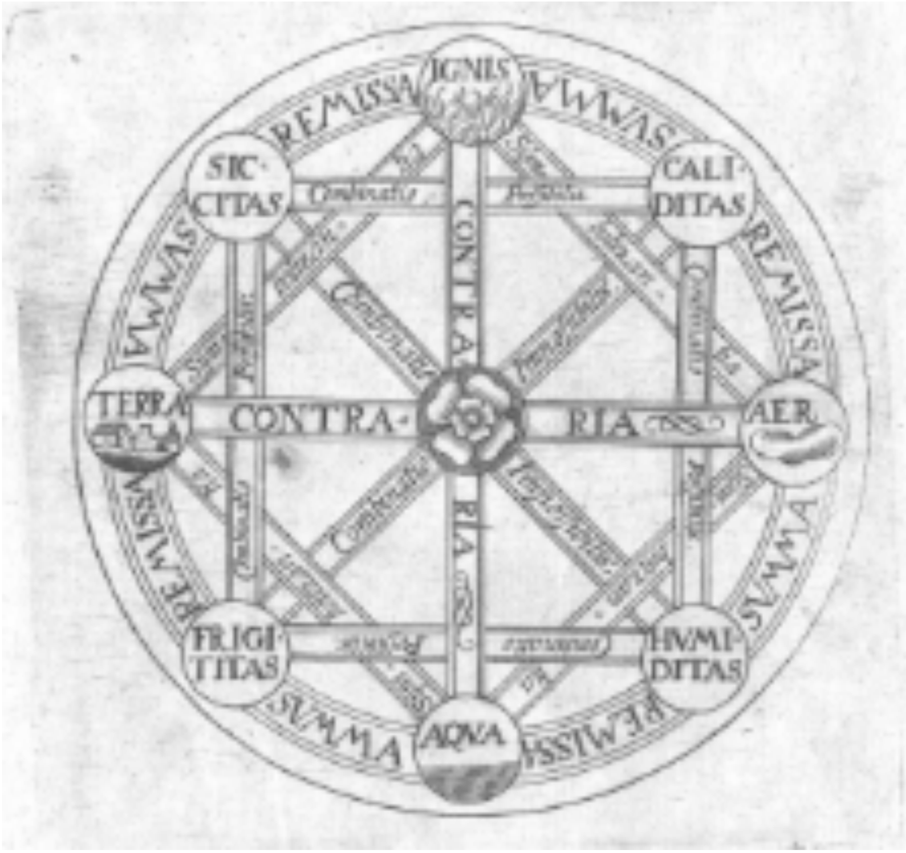
Seu

Logicæ inventionis ſemina
ſparguntur,

Præfixa eſt Synopſis totius Tractatus, & additamenti loco
Demonſtratio
EXISTENTIÆ DEI,
ad Mathematicam certitudinem
exacta.

FRANCOFURTI,
Apud HENR. CRISTOPH. CRÖKERUM, Bibliopol.
1690.

Letteratura combinatoria



Leibniz, Ars combinatoria

Sono indicati i **quattro elementi** (TERRA, ARIA, ACQUA E FUOCO) e i passaggi da uno stato all'altro di una delle **quattro qualità:**
caldo (CALIDITAS), **umido** (HUMIDITAS), **freddo** (FRIGIDITAS) e **secco** (SICCITAS).

Letteratura combinatoria

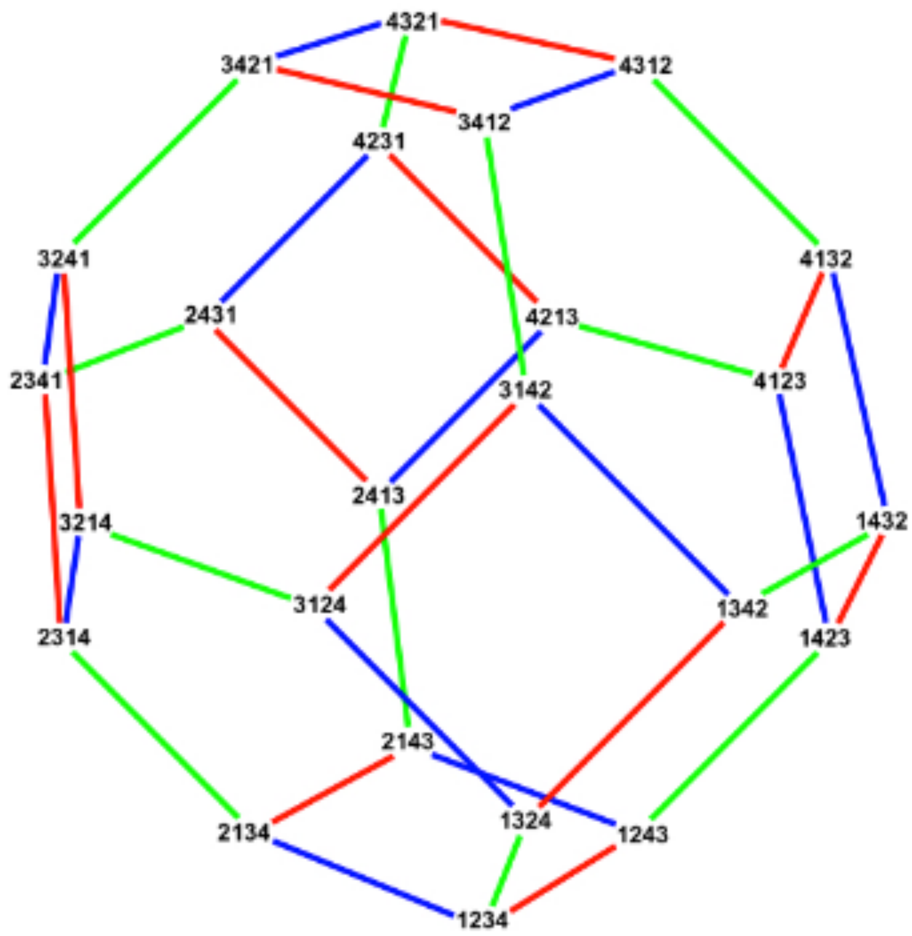
1960, Parigi, gruppo dell'*Oulipo*, sigla che sta per *Ouvroir de littérature potentielle* (laboratorio di letteratura potenziale)
Personaggi di spicco:
Raymond Queneau, Georges Perec, Italo Calvino, …

Di Italo Calvino:

Il visconte dimezzato, *Il barone rampante* e *Il cavaliere inesistente*.

Città invisibili , Marco Polo descrive all'imperatore dei Tartari Kublai Khandel le città del suo immenso impero: città reali, immaginarie, frutto della sua fantasia, che colpiscono sempre più il Gran Khan.
Affermazione dell'autore: **questo libro è fatto a poliedro, e di conclusioni ne ha un po' dappertutto, scritte lungo tutti i suoi spigoli**.
(1983 conferenza alla Columbia University a New York).

Poliedro
immagine del pensiero combinatorio



Letteratura combinatoria

Raymond Queneau
Cent mille milliards de poèmes (1961)

$$\underbrace{10\cdot 10\cdot 10\cdot \ldots \cdot 10}_{14\,\text{fattori}} =$$

$$= 10^{14} =$$

$$= 100'000'000'000'000$$

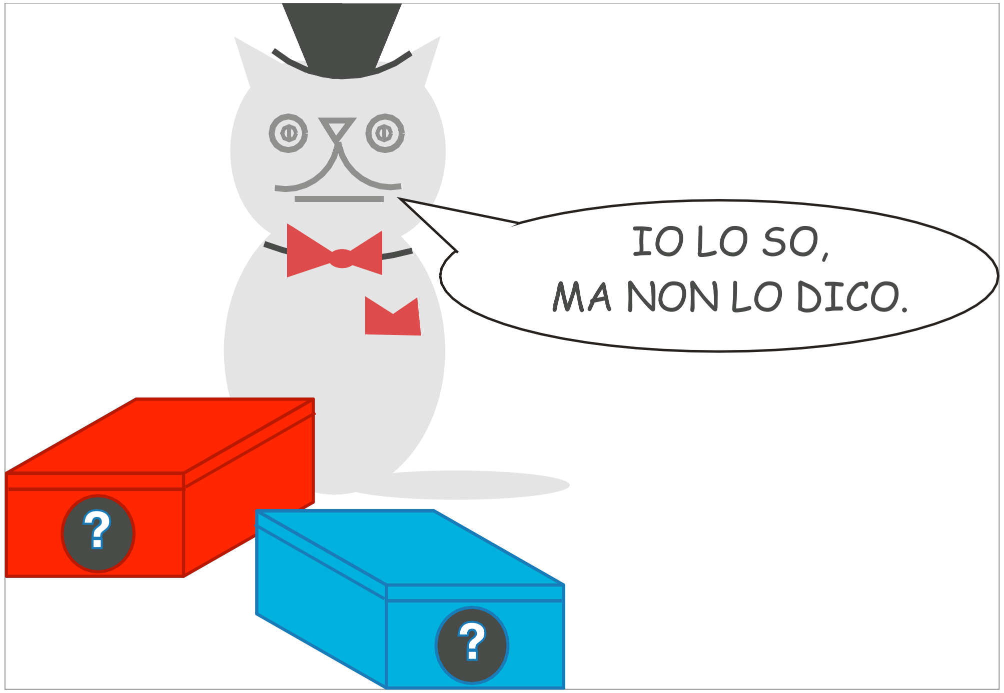
$$= 100 \text{ bilioni} = 100 \text{ tera (T)}$$

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10
v01										
v02										
v03										
v04										
v05										
v06										
v07										
v08										
v09										
v10										
v11										
v12										
v13										
v14										

Giochiamo con i bambini

Quante macchinine?

Tratto da <I nostri amici numeri> quad. I/II



ARTURO PORTA DUE SCATOLETTE DI MACCHININE PER GIOCARE CON I SUOI AMICI. LE VUOTA SUL TAVOLO ED ESCONO 6 MACCHININE.

QUANTE MACCHININE POTEVANO ESSERCI IN OGNI SCATOLETTA?

Quante macchinine?

I bimbi, di solito, iniziano con tentativi spontanei. Per esempio:
1 nella rossa e 5 nella blu
3 nella rossa e 3 nella blu
(…)
Può darsi che, insieme, arrivino a trovare tutti i casi possibili,
MA
alla domanda "Siete sicuri di non averne dimenticato?" oppure all'affermazione autoritaria dell'insegnante: "Ne manca una!" non sanno reagire con sicurezza.
Occorre adottare un criterio di costruzione. Per esempio:

0 - **6** **1** – **5** **2** – **4** **3** – **3** e anche le possibili gemelle (*)
6 – **0** **5** – **1** **4** – **2**

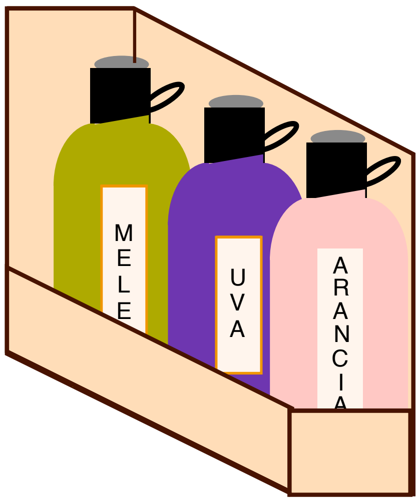
Le possibilità sono 7, non una di più, non una di meno.

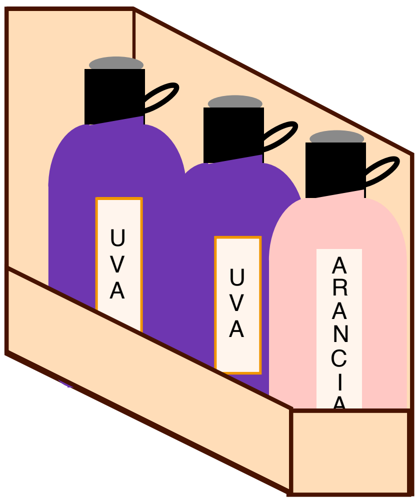
(*) denominazione introdotta da Girolamo Cardano (XVI secolo).

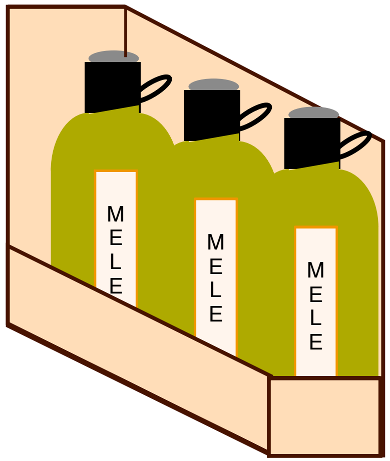
Quanti tipi di confezioni?

Si vogliono preparare confezioni di tre bottiglie ciascuna.
Quanti tipi diversi di confezioni si possono fare?

Qualche esempio:



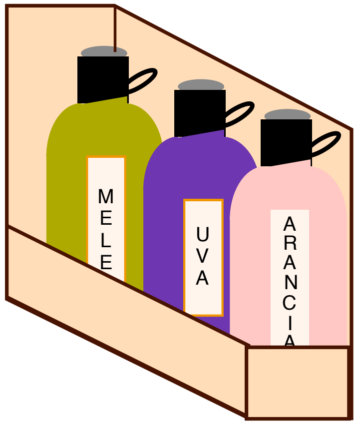




Quanti tipi di confezioni?

Un possibile iter risolutivo:

U	M	A
3	0	0
0	3	0
0	0	3
2	1	0
2	0	1
1	2	0
1	0	2
1	1	1
0	2	1
0	1	2



Vi sono 10 possibili tipi di confezione, non uno di più, non uno di meno.

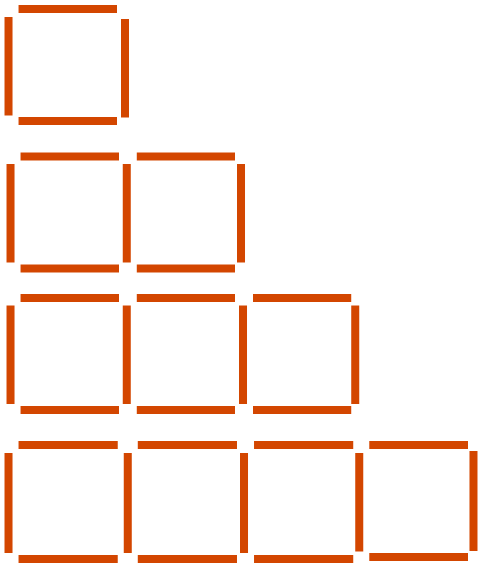
Quadrati di bastoncini

Q1

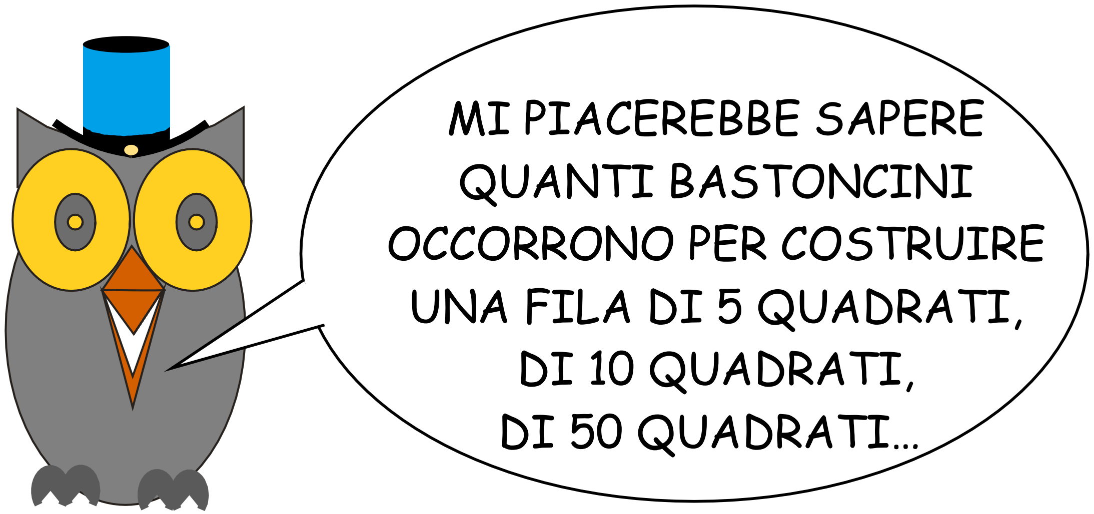
Q2

Q3

Q4



... ...



Tratto da <I nostri amici numeri> quad. III

Quanti bastoncini?

Alcuni modi per contare:

$Q_5 \quad 3 \cdot 5 + 1 = 16$

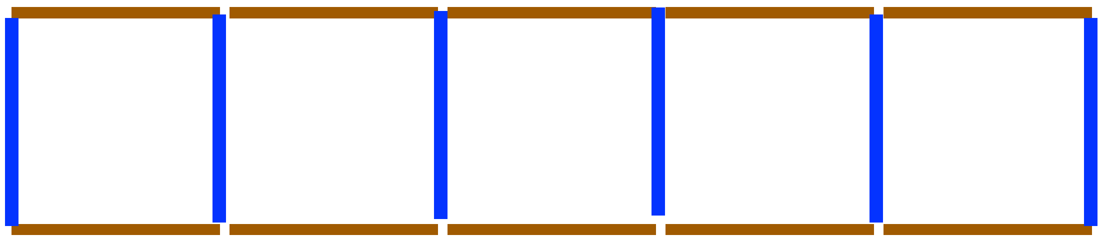
$Q_{50} \quad 3 \cdot 50 + 1 = 151$

$Q_N \quad 3 \cdot N + 1$

$Q_5 \quad 4 \cdot 5 - 4 = 16$

$Q_{50} \quad 4 \cdot 50 - 49 = 151$

$Q_N \quad 4 \cdot N - (N-1)$



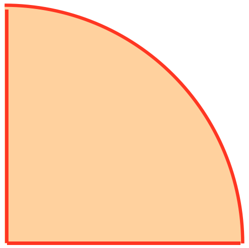
$Q_5 \quad 5 \cdot 2 + 6 = 16$

$Q_{50} \quad 50 \cdot 2 + 51 = 151$

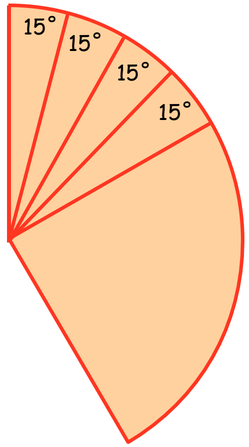
$Q_N \quad N \cdot 2 + (N+1)$

I ventagli di Genoveffa

Sono composti di un certo numero di elementi base, cioè di settori circolari quarti di cerchio.



elemento base

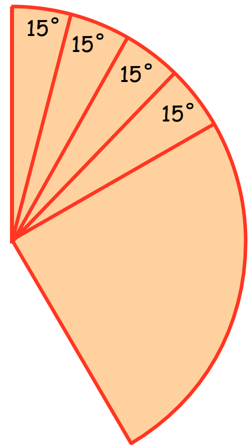


Ventaglio
di 5 elementi

Un ventaglio di 5 elementi ha ampiezza
$90^\circ + 4 \times 15^\circ = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$
Con un altro numero di elementi sempre uguali si costruirà un ventaglio diverso.
L'angolo massimo di un ventaglio è 360°.
Quanti ventagli diversi
si possono costruire?

**Tratto da
<I nostri amici numeri>
quad. IV-V**

I ventagli di Genoveffa



Ventaglio
di 5 elementi

Un ventaglio di 5 elementi ha l'ampiezza
$90^\circ + 4 \times 15^\circ = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$
Cioè: $90^\circ + (5–1) \times 15$
Quindi un ventaglio di N elementi ha
l'ampiezza $90^\circ + (N–1) \times 15^\circ$
Si può costruire la tabella:

elementi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
gradi	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225

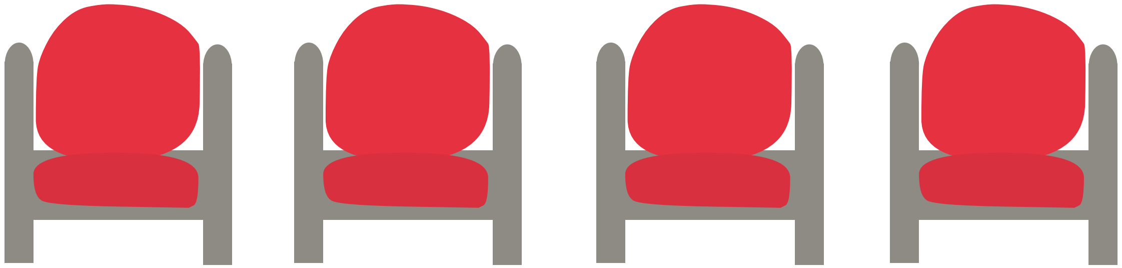
elementi	11	12	13	14	15	16	17	18	19
gradi	240	255	270	285	300	315	330	345	360

In totale si possono costruire 19 ventagli di ampiezza diversa,
non uno di più, non uno di meno.

Anagrammi
una situazione basilare

Al cinema

Padre, **M**adre, **A**nna e **B**eppe entrano nella sala cinematografica e trovano 4 poltroncine libere. Prendono posto e attendono l'inizio della proiezione.



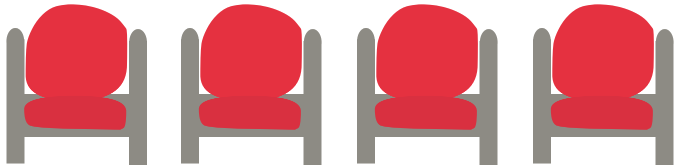
In quanti modi potrebbero sedersi?

P	**M**	**A**	**B**
A	**B**	**M**	**P**
M	**P**	**B**	**A**

(.........)

Ogni modo (o allineamento) è detto **permutazione**.

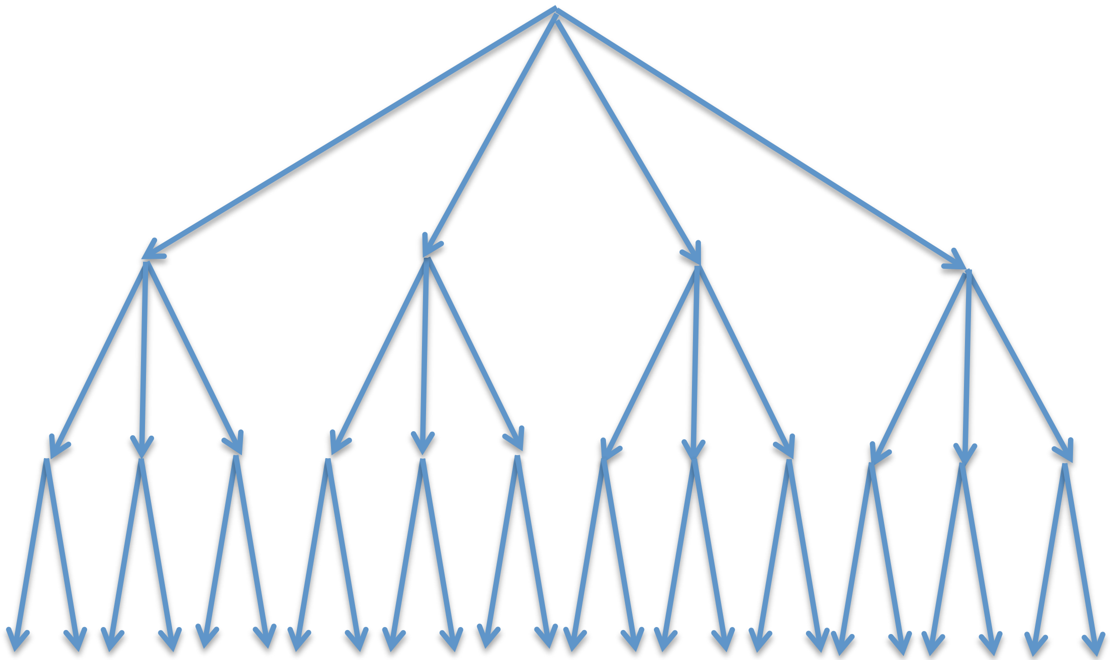
Al cinema



Il primo ha
4 possibilità di scelta

Il secondo ha
3 possibilità di scelta

Il terzo ha
2 possibilità di scelta



Il quarto non può scegliere.
In totale si hanno 24 possibilità: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 = 4!$
4! Si legge: 4 fattoriale.

Altro esempio di permutazione: l'anagramma

Precisazione: non è necessario che l'anagramma sia una parola della lingua italiana.

Esempio

Quanti anagrammi ha la parola APE?

APE – AEP

PAE – PEA

EAP – EPA

Totale: $6 = 3 \cdot 2 = 3!$

L'idea di disporre le lettere a seconda dell'iniziale è uno dei diversi criteri che si possono adottare.

Ciascuno è un procedimento **costruttivo combinatorio**.

Altro esempio

Quanti anagrammi ha la parola CANE?

CANE $\rightarrow$ $6 = 3 \cdot 2 = 3!$

ACNE $\rightarrow$ $6 = 3 \cdot 2 = 3!$

NCAE $\rightarrow$ $6 = 3 \cdot 2 = 3!$

ECAN $\rightarrow$ $6 = 3 \cdot 2 = 3!$

Totale: $4 \cdot 6 = 24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 4!$

APE (3 lettere): 3 x 2 = 6 = 3!

CANE (4 lettere): 4 x 3 x 2 = 24 = 4!

PORTA (5 lettere): 5 x 4 x 3 x 2 = 120 = 5!

CAMINO (6 lettere): 6 x 5 x 4 x 3 x 2 = 720 = 6!

Conosciamo meglio il fattoriale: esercizio di stima

3! = 6   4! = 24   5! = 120   6! = 720

Stima personale: quanto fa 10! circa?

Tra 1000 e 10’000?
Tra 10’000 e 100’000?
Tra 100’000 e 1’000’000?
Tra 1’000’000 e 10’000’000?
Più di 10’000’000?

Risultato calcolatrice:
3’628’800

Anagrammi di parole con lettere ripetute

Quanti anagrammi ha la parola …
ORO? (3 lettere, 2 uguali)

ORO ORO OOR OOR ROO ROO

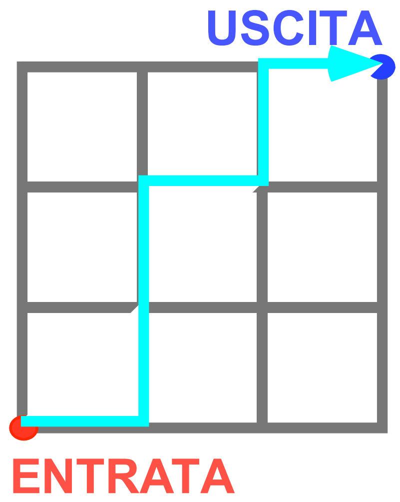
totale: 3 = 3!/2!

TUTTO? (5 lettere, 3 uguali)
TUTTO
totale: 5! / 3! = 120 / 6 = 20

MAMMA? (5 lettere, 3 uguali, 2 uguali)
totale: (5! / 3!) / 2! = (120 / 6) / 2 = 10

Percorsi su griglie piane

Quanti percorsi minimi esistono?



Nei nodi o si va o a destra o in alto.
Idea: codificare i percorsi.

→ destra (**d**), ↑ alto (**a**).

Ogni codice di percorso minimo
è una parola con 3 **d** e 3 **a**.

Dunque vi sono tanti percorsi minimi quanti sono gli anagrammi della parola **dddaaa**.

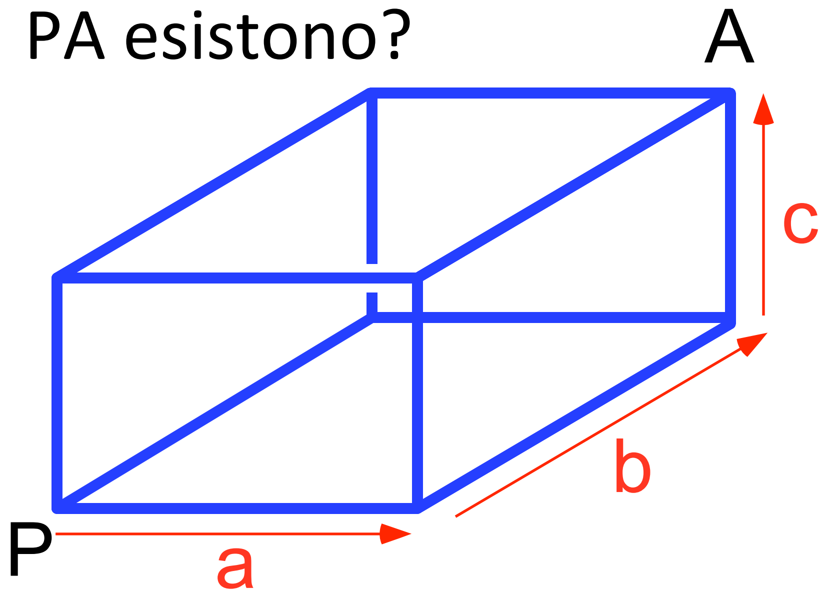
Esempio: **daadad**

In totale vi sono:

$(6! / 3!) / 3! = (720 / 6) / 6 = 20$ percorsi minimi.

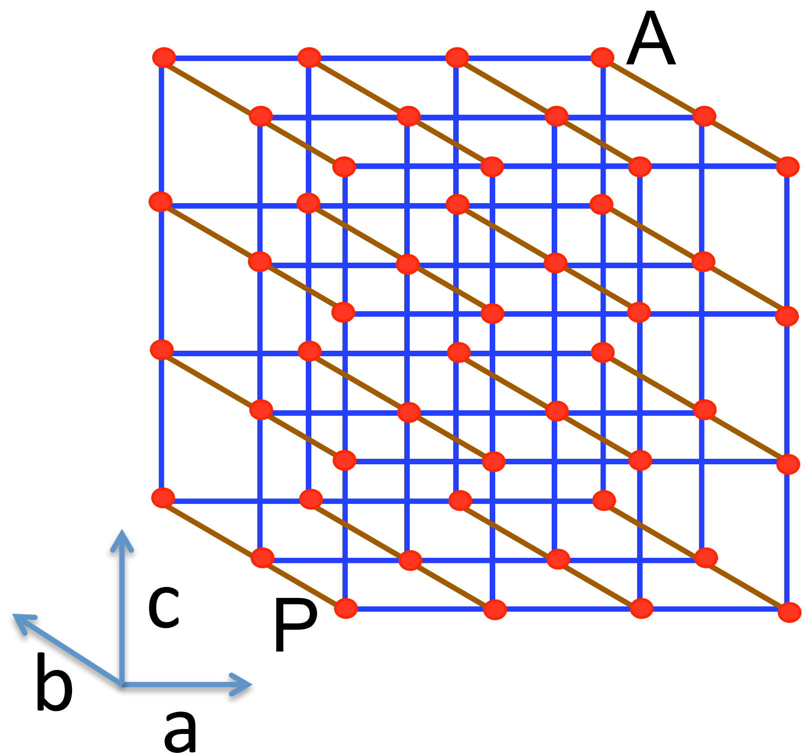
Percorsi su griglie 3D

Quanti percorsi minimi
PA esistono?



Ogni percorso
è codificabile con un
anagramma di abc.

Dunque si hanno
3! = 6 percorsi minimi

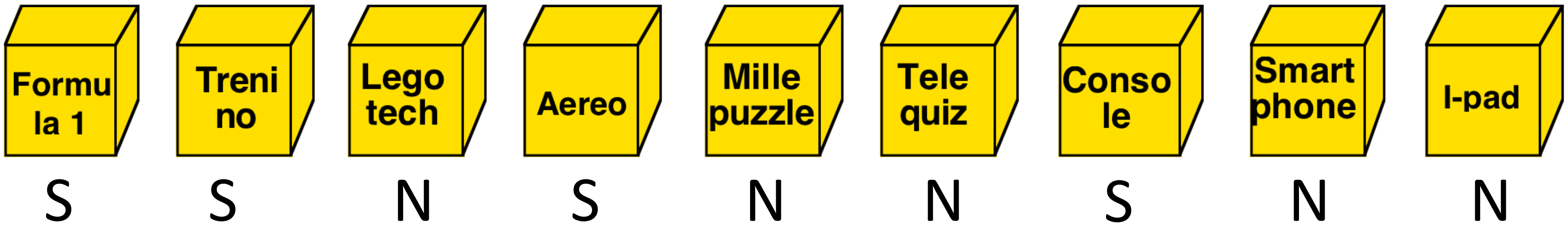


Ogni percorso PA
è codificabile con un
anagramma di aaabbccc.

Dunque si hanno
((8! / 3!) / 2!) / 3! = 20’160
percorsi minimi

Altro uso degli anagrammi

Il vincitore di una gara riceve 4 premi che può scegliere fra i 9 disposti sul tavolo.



Quante scelte diverse ha a disposizione il vincitore?

Stima: 25? 50? 75? 100? 125? 150? 175? 200? di più?

Ogni possibile scelta del vincitore è codificabile con una parola di 9 lettere, 4 uguali a S (SÌ) e 5 a N (NO).

In totale: (9! / 4!) / 5! = 126 scelte a disposizione.

Generalizzazione: numero dei sottoinsiemi di k elementi di un insieme di n elementi

Riprendiamo il problema precedente. Il numero di scelte possibili (sottoinsieme di 4 elementi di un insieme di 9 elementi) è

$$\frac{9!}{4!\cdot 5!} = \frac{9!}{4!\cdot (9-4)!} = 126$$

Sostituiamo il 9 con n e il 4 con k e otteniamo

$$\frac{n!}{k!\cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

che è chiamato **simbolo combinatorio** o **coefficiente binomiale** (XVII secolo: Pascal e Newton).

Perché coefficiente binomiale?

Si riferisce alla potenza di un binomio, cioè, nella forma più semplice:

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}_{\text{n fattori}}$$

$$= a^n + n\cdot a^{n-1}\cdot b^1 + \frac{n!}{2!\,(n-2)!}a^{n-2}\cdot b^2 + \frac{n!}{3!\,(n-3)!}a^{n-3}\cdot b^3 + \ldots + b^n$$

Per a = b = 1   otteniamo

$$2^n = 1 + n + \frac{n!}{2!\,(n-2)!} + \frac{n!}{3!\,(n-3)!} + \ldots + 1$$

Cioè: un insieme di n elementi ha 2^n sottoinsiemi.

Il numero delle parti di un insieme di n elementi …

Si può anche calcolare in questo modo. Immaginiamo di costruire un qualunque sottoinsieme.

Per il primo elemento si hanno 2 possibilità: prenderlo o no.

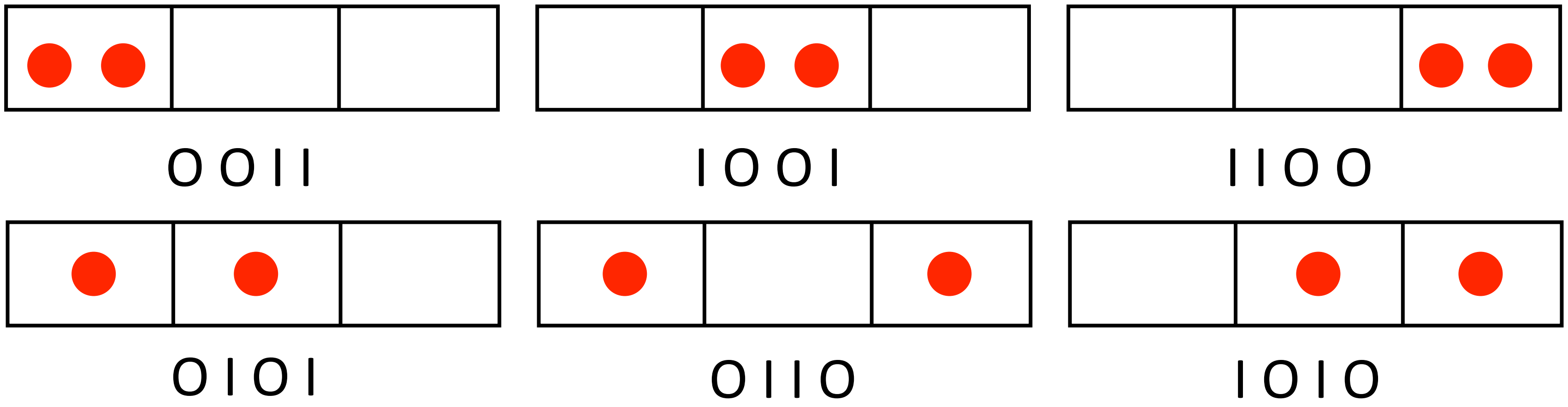
Per ciascuna delle due possibilità di prima, per il secondo insieme ci sono di nuovo 2 possibilità.
In totale: $2 \cdot 2 = 4$ possibilità

Per ciascuna delle 4 possibilità ce ne sono di nuovo 2.
In totale: $4 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$ possibilità.

In generale, per un insieme di n elementi si hanno 2^n possibilità, cioè si possono costruire 2^n diversi sottoinsiemi. Non uno di più, non uno di meno.

Quando proprio non te lo aspetti!

In quanti modi 2 palline identiche si possono distribuire in 3 cassetti?



Ogni modo è codificabile con un anagramma della parola OOII.

Quindi si hanno (4! / 2!) / 2! = 6. In generale (n palline e r cassetti)

si hanno $\dfrac{(n+r-1)!}{n!\,(r-1)!}$ modi di distribuzione.

Statistica di Bose-Einstein:
numero di modi di distribuire n particelle tra gli r sottolivelli di un dato livello energetico.

Segnalazione bibliografica

Gianfranco Arrigo, Marina Giacobbe, Lorella Maurizi

I nostri amici numeri

Tre quaderni di matematica per la scuola primaria

classi I/II, classe III, classe IV/V

Vai sul sito

sapyentbooks.com

/ categorie / eBook per scaricare la Guida gratuita

Indirizzi utili

gianar76@gmail.com

www.smasi.ch

https://rsddm.dm.unibo.it

smasi

società matematica della svizzera italiana