Dall'infinito dei Greci agli infiniti infiniti di Cantor

Gianfranco Arrigo
SMASI Lugano, NRD Bologna

smasi
società matematica svizzera italiana

L’infinito nell’immaginario collettivo

Che cos’è l’infinito per la gente comune?

(da un’indagine fatta nelle nostre scuole da Gianfranco Arrigo e Silvia Sbaragli, 2004)

Infinito come indefinito

Per me vuol dire senza confini, senza margini, come lo spazio (III media).

Mi dispiace ma nessuno mi ha mai insegnato cos’è l’infinito, penso però che sia un qualcosa di cui non si sa la quantità ben definita (I Liceo).

Infinito come numero grande

Per me è un numero grande, talmente grande che non si può dire esattamente il suo valore
(IV media).

L’infinito nell’immaginario collettivo

Infinito come illimitato

Ciò che quantitativamente non posso misurare; per esempio, i punti di una retta, ma non quelli di un segmento (studente universitario).

Infinito come procedimento

Che cosa vuol dire contare all’infinito? Vuol dire che se conti per 1000 anni di seguito c’è sempre un numero maggiore di quello dove sei arrivato! C’è sempre un numero in più e così per sempre.
(V elementare)

La gara di matematica

(racconto di Cesare Zavattini, 1931)

(...) Esauriti i preliminari, la gara ebbe inizio alla presenza del principe Ottone e di un ragguardevole gruppo di intellettuali.

«Uno, due, tre, quattro, cinque...»

(...) Alle ventidue precise avvenne il primo colpo di scena. L'algebrista Pull scattò: «Un miliardo».

Binacchi, un italiano, aggiunse issofatto: «Un miliardo di miliardi di miliardi».

Nella sala scoppiò un applauso subito represso dal Presidente.

La gara di matematica

(racconto di Cesare Zavattini, 1931)

(…) Mio padre guardò intorno con superiorità e cominciò: «Un miliardo di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi (…)»
«Il presidente Maust, pallidissimo, mormorava a mio padre, tirandolo per le falde della palandrana: «Basta, basta, le farà male». Mio padre seguitava fieramente: <... di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi...»
A poco a poco la sua voce si smorzò, l'ultimo fievole «di miliardi» gli uscì dalle labbra come un sospiro, indi si abbatté sfinito sulla sedia.

La gara di matematica

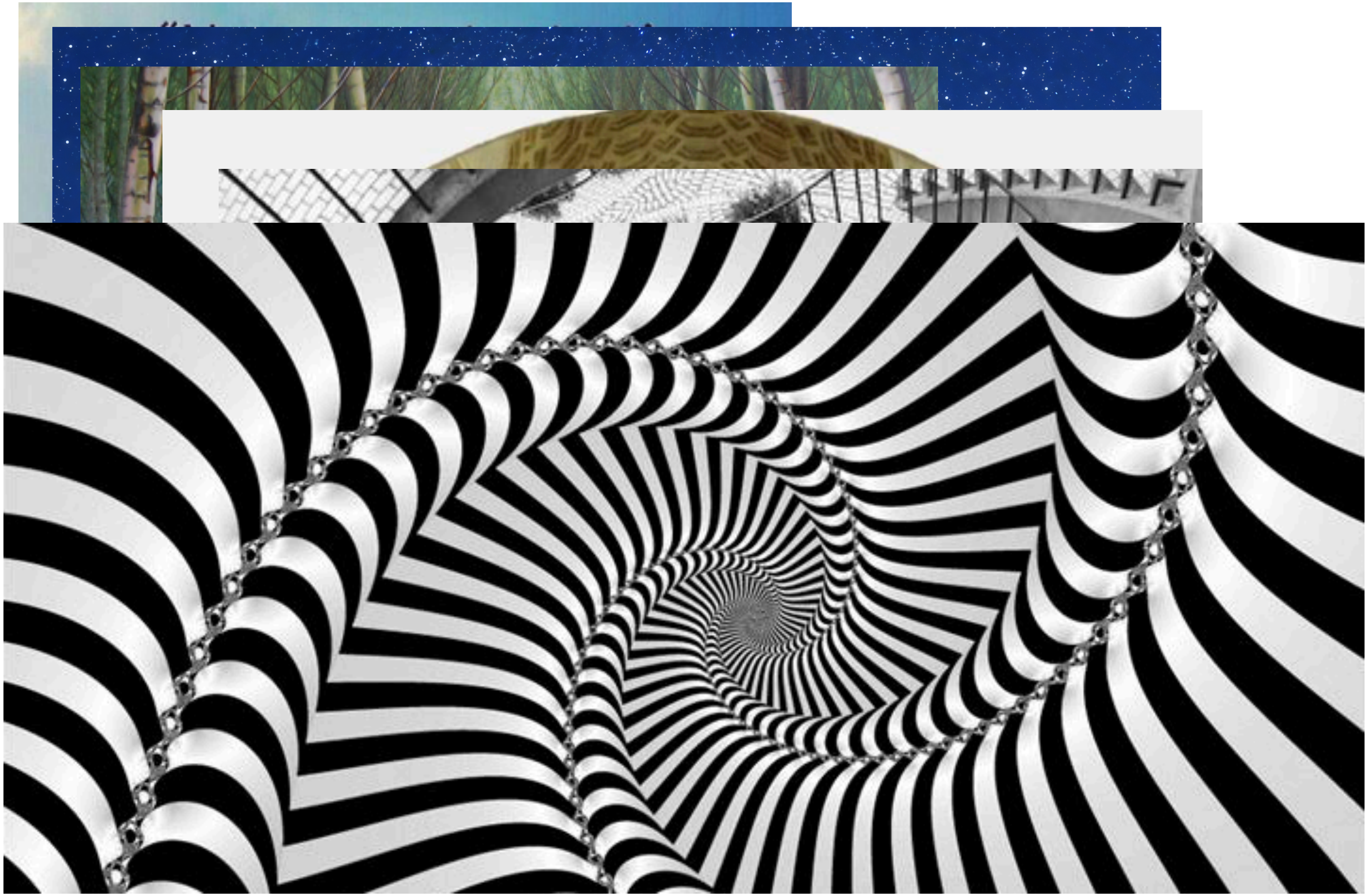
(racconto di Cesare Zavattini, 1931)

Gli spettatori in piedi lo acclamavano freneticamente. Il principe Ottone gli si avvicinò e stava per appuntargli una medaglia sul petto, quando Gianni Binacchi urlò: «**Più uno**!»

La folla precipitatasi nell'emiciclo portò in trionfo Gianni Binacchi.

Quando tornammo a casa, mia madre ci aspettava ansiosa alla porta. Pioveva. Il babbo, appena sceso dalla diligenza, le si gettò tra le braccia singhiozzando: «Se avessi detto "**più due**" avrei vinto io».

Infinito e arte figurativa



L’infinito nella filosofia dei Greci

Primi passi [VII - VI sec. a.C.]

La scuola ionica

(regione di Mileto, nell’odierna Turchia)

Talete e **Anassimandro**:

l’*arché* come qualcosa di qualitativamente indefinito (idea di indeterminato)

ápeiron, generalmente tradotto in “senza limite”, “senza confine”

Anassimene:

Esempio di *ápeiron*: l’aria che rappresenta l’illimitatezza e la onnipresenza propria dei principi primordiali.

La scuola pitagorica [VI sec. a.C.]

Pitagora, nativo di Samo, un'isola del Mar Egeo, vicina all'Asia Minore, viaggia tra Oriente (Mesopotamia ed Egitto) e Occidente (Metaponto, Crotone)

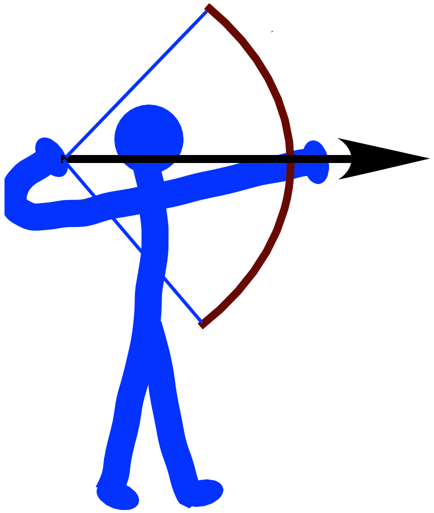
Gli oggetti reali sono aggregati di **monadi**, corpuscoli unitari, dotati di grandezza, ma talmente piccoli da risultare non ulteriormente divisibili (**teoria atomistica**)

Pitagora si accorge che qualcosa non quadra nella teoria atomistica, quando scopre, non senza disappunto, l'esistenza di numeri non razionali.

La scuola eleatica [VI - V sec. a.C.]

Zenone di Elea

Elea, oggi Velia nel Cilento. Zenone è noto per i paradossi con i quali confutava le idee finitiste (atomiste) dei Pitagorici.



Paradosso della freccia

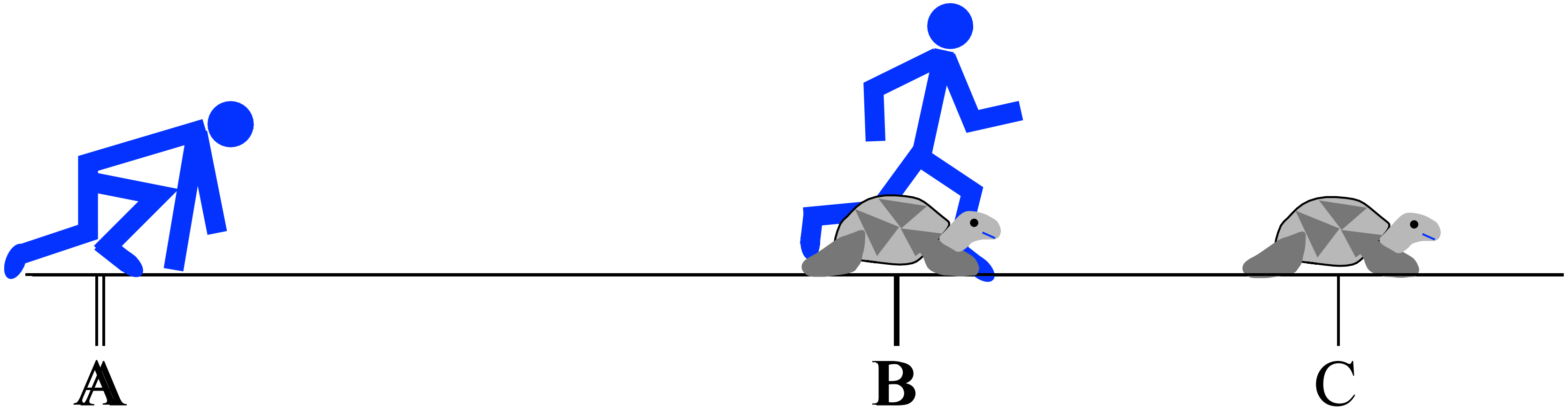
Una freccia scoccata dall'arco non è in movimento come comunemente si crede, in realtà è ferma.

Infatti, in ciascuno degli istanti in cui è divisibile il tempo la freccia occupa uno spazio determinato, la freccia è in riposo in ogni istante.

Quindi il movimento è… la somma di istanti di riposo, e perciò la freccia non si muove ma è immobile per l'eternità.

La scuola eleatica [VI - V sec. a.C.]

Paradosso di Achille e la Tartaruga



Quando Achille giunge in B, la tartaruga ha percorso BC, quando Achille giunge in C, la tartaruga …

Così Achille non raggiungerà mai la tartaruga!

Come si può spiegare il paradosso a una classe di scuola media?

Esempio
Handicap iniziale 100 m;
Velocità della tartaruga (T) 1/10 di quella di Achille (A)
Quando A ha percorso i 100 m, T ha percorso 10 m
Quando A ha percorso 10 m, la T ha percorso 1 m
Quando A ha percorso 1 m, la T ha percorso 0,1 m
Ecc.
La lunghezza che A deve percorrere per raggiungere T è:
100 + 10 + 1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + … = 111,1111…=

$$=111,\bar{1}=\frac{1000}{9}$$

I liceali calcolerebbero il limite della serie (grazie a Dedekind!)

La scuola eleatica [VI - V sec. a.C.]

Zenone, come tutti noi, sapeva benissimo che la freccia scoccata da un arco non rimane immobile e che Achille avrebbe raggiunto la tartaruga, ma il suo paradosso non si può spiegare nel contesto della teoria atomistica.
Una spiegazione matematicamente corretta non si sarebbe potuta dare prima del **1872**, anno in cui **Dedekind** definì il **numero reale**, stabilendo la struttura topologica della retta dei numeri reali, sul quale si basa l'attuale analisi matematica.

La posizione di Aristotele (384-322 a.C.) riguardo all'infinito dei matematici

Duplice natura dell'infinito:

"in potenza"

come procedimento

"in atto"

come oggetto

« *[l'infinito potenziale è] quello al di là del quale c'è sempre qualcosa*»

[l'infinito attuale è] quello al di là del quale non c'è più nulla; … (Aristotele, Fisica)

Per evitare paradossi, Aristotele proibì
ai matematici di far uso dell'infinito attuale.

Euclide (300 a.C.), l'ubbidiente, nei suoi *Elementi*, accetta la scelta di Aristotele.
Per esempio:
- non usa il termine retta, ma parla di **segmento prolungabile continuamente per diritto**;
- nella sua famosa dimostrazione dell'esistenza di infiniti numeri primi, non usa il termine "infinito", ma dice che **non esiste il più grande numero primo**.

Una questione intrigante

$$0{,}99999\ldots = 0{,}\overline{9} \overset{?}{=} 1$$

Così rispondono gli studenti di terza media:

Pongono $x = 0{,}\overline{9}$

Scrivono $10\,x = 9{,}\overline{9}$

Sottraggono la prima dalla seconda

$10\,x - x = 9{,}\overline{9} - 0{,}\overline{9}$ quindi $9\,x = 9$ cioè $x = 1$

Hanno usato l'infinito in atto?

Archimede di Siracusa (287 – 212 sec. a.C.)

“il primo grande disubbidiente”

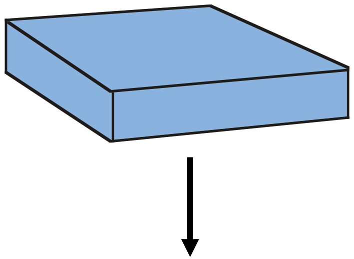
Da una lettera di Archimede indirizzata a Eratostene (ritrovata solo nel 1906 dal filologo danese Heiberg):

«(...) *decisi di scriverti e di esporti nello stesso libro le caratteristiche di un certo metodo* [il metodo di esaustione] (…)

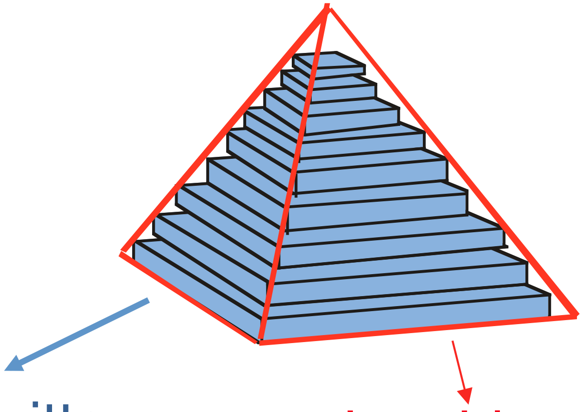
(…) *di quei teoremi, dei quali Eudosso trovò per primo la dimostrazione,* [cioè] *che il cono è la terza parte del cilindro e la piramide* [è la terza parte] *del prisma aventi la stessa base e altezza uguale.*»

Archimede di Siracusa (287 – 212 sec. a.C.)

il metodo di esaustione

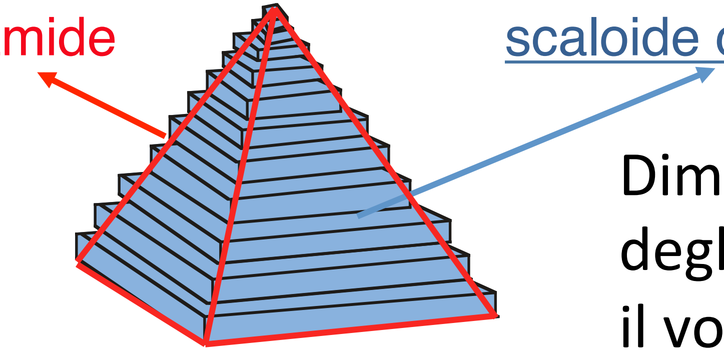


elemento base



scaloide inscritto

piramide



piramide

scaloide circoscritto

Diminuendo sempre più lo spessore
degli elementi base,
il volume degli scaloidi si avvicina
sempre di più a quello della piramide.

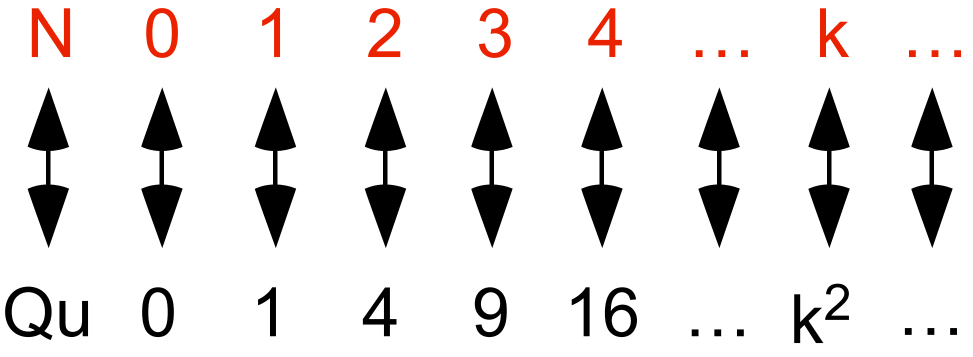
Quando il numero di elementi base diventa infinito [**in atto!**],
il loro spessore diventa nullo [**infinitesimo**] e il volume degli scaloidi
si uguaglia a quello della piramide.

La liberazione
dal veto aristotelico
e da una «nozione comune»
di Euclide

Galileo Galilei

Dialogo sopra i due massimi sistemi (1632)

Io non veggo che ad altra decisione si possa venire, che a dire, infiniti esser tutti i numeri [naturali], infiniti i quadrati, infinite le loro radici, **né la moltitudine dei quadrati esser minore di quella di tutti i numeri** [naturali], **né questa maggiore di quella**, ed in ultima conclusione, gli attributi di uguale, maggiore e minore non aver luogo negli infiniti [**in atto!**], ma solo nelle quantità terminate.



N	0	1	2	3	4	…	k	…
Qu	0	1	4	9	16	…	k^2	…

~~Il tutto è maggiore della sua parte~~

(per insiemi infiniti)

Intervallo: la storiella dell’albergo infinito

Immaginiamo che esista un albergo con infinite camere.
L’albergo è al completo: tutte le camere sono occupate.

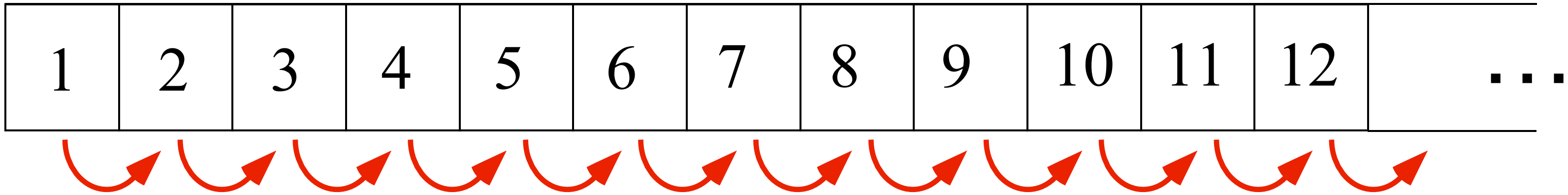
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…

Arriva un personaggio importante e chiede una camera.
Il direttore è nei pasticci: come rifiutare l’alloggio a un vip?

Intervallo: la storiella dell'albergo infinito

Nessun problema!

Il direttore prega gentilmente ogni suo ospite di spostarsi nella camera successiva:



Rimane così libera la camera numero 1, che viene assegnata al nuovo arrivato.

Dopo un po' arriva un pullman carico di turisti. Chiedono 20 camere.

Riuscirà il direttore ad accontentarli tutti?

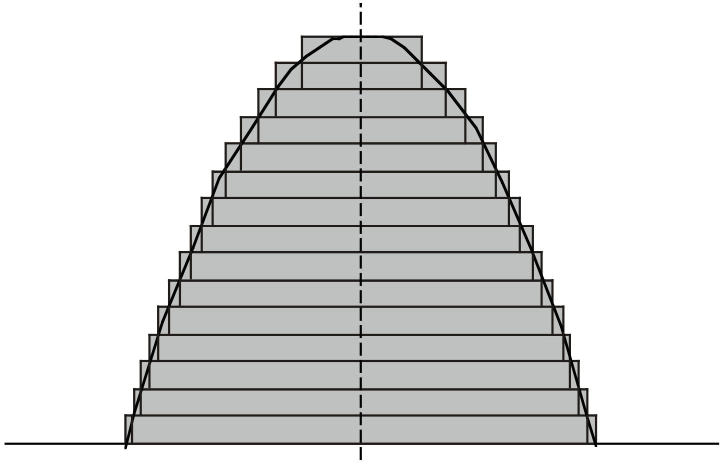
E se arrivasse un pullman con infiniti turisti?

Il metodo degli indivisibili (XVI-XVII sec.)

Altri disubbidienti al veto di Aristotele:
Luca Valerio, Bonaventura Cavalieri, Evangelista Torricelli

In questi tempi nessuno conosceva i documenti di Archimede sul "metodo di esaustione" (trovati solo nel 1906). Il metodo "degli indivisibili" è una reinvenzione dei lavori di Archimede.

Esempio: Luca Valerio



Ad ogni [para uò inscrivere una figura forma ngoli] e circoscriver n modo che la figura circosc l'inscritta **di una qualsiasi quantità prefissata**.

Infinito in potenza

Quando ques ità è infinitesima
Le due aree con quella del segmento d

infinito in atto

La nascita del calcolo infinitesimale:

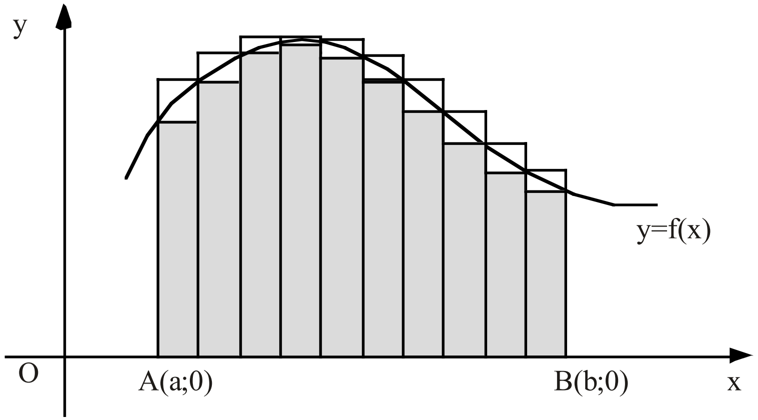
Matematici che lavorarono con l’infinito in atto

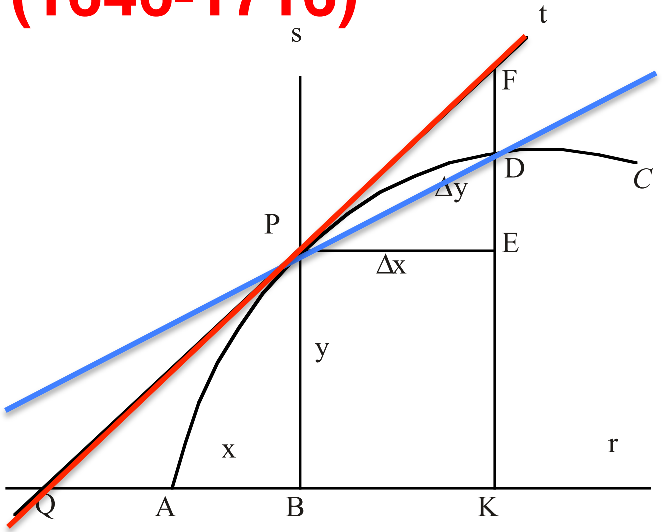
e con i numeri reali

senza che questi fossero stati rigorosamente definiti

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716)

punto di vista geometrico





area:
l'integrale

operazioni ⟷ inverse

pendenza della tangente:
la derivata

area poligonale:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x_i$$

area superficie:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx$$

infinito in atto

pendenza secante PD:

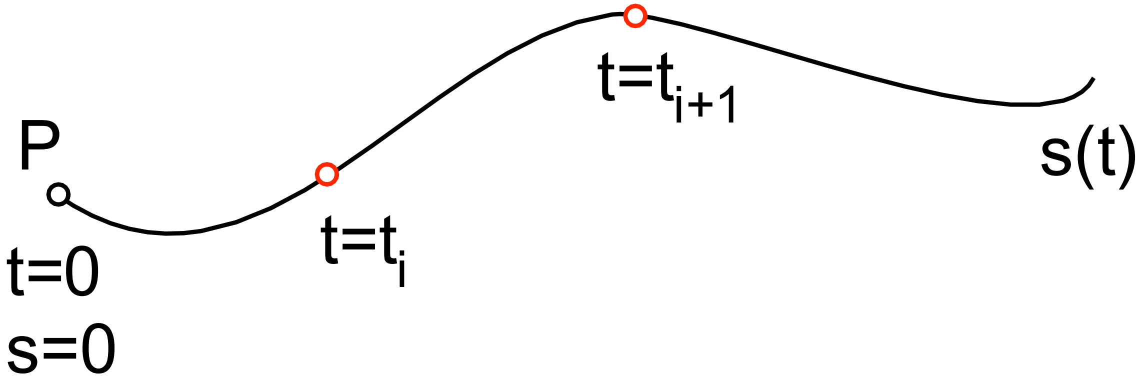
$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$$

pendenza tangente t:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Isaac Newton (1642–1727)

punto di vista cinematico



$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$$

$$\Delta s_i = s\left(t_{i+1}\right) - s\left(t_i\right)$$

velocità media:

$$\frac{\Delta s_i}{\Delta t_i}$$

velocità istantanea:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

infinito in atto

Gli applicatori del calcolo differenziale e integrale

John Wallis (1616 –1703)

Jakob Bernoulli (1654–1705)

Johann Bernoulli (1667–1748)

Leonhard Euler (1707–1783)

Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866)

e tanti altri

ottennero numerosi risultati importanti che contribuirono a sviluppare anche la fisica e l'ingegneria.

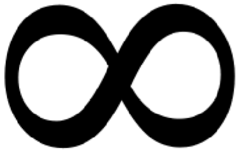
Ma il Gigante (il calcolo differenziale e integrale) ha ancora i piedi di argilla!

Il passaggio dalla forma infinitesima a un limite finito **non** poteva essere dimostrato rigorosamente.

Lo farà **Richard Dedekind** nel 1872 nella sua opera
Stetigkeit und Irrationale Zahlen.

Curiosità: da dove viene il simbolo di infinito?

L’ipotesi più credibile:
è la **M** (Mille, molto grande) della scrittura onciale che fu usata dal III all'VIII secolo nei manoscritti dagli amanuensi latini e bizantini, e dall'VIII al XIII secolo soprattutto nelle intestazioni e nei titoli.



John Wallis lo introdusse con il suo significato matematico nel 1655.

Simbolo utilizzato da Leonhard Euler per denotare il concetto di infinito **assoluto** (il “minore” degli infiniti).

Verso l’apoteosi:
gli infiniti infiniti
di Cantor

Georg Cantor

1845 San Pietroburgo - 1918 Halle (D)

Il padre, danese, era agente di vendita in Russia. La madre, russa, era una brava musicista.

Nel 1872, professore al Politecnico di Zurigo, conobbe Richard Dedekind, casualmente, durante una vacanza a Interlaken.

Cantor trova in Dedekind l'unico matematico che in quei tempi riconobbe la **sua teoria degli insiemi infiniti**.

Preliminari

Il primo grande passo, Cantor lo compie dimostrando che l'infinità dell'insieme dei numeri reali **è maggiore** dell'infinità dei numeri naturali.

Questo risultato ai più sembra scontato, ma l'importanza sta nel fatto che Cantor comincia a distinguere tra due infinità diverse:

$\aleph_0$: infinità di N (naturali)

$\aleph$: infinità di R (reali)

Il secondo passo, più sofferto, consiste nel cercare se vi siano altre infinità. Non ne trova tra $\aleph_0$ e $\aleph$, quindi prova a pensarne di più grandi.

Preliminari

Cantor dapprima le ricerca in geometria. Pensa che l’infinità dei punti della retta, che è quella dei numeri reali, sia inferiore all’infinità dei punti di una superficie, la quale, a sua volta, sia inferiore all’infinità dei punti dello spazio tridimensionale.

Con grande sorpresa, Cantor riesce a dimostrare che è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra i punti di un quadrato e quelli di un suo lato. Dunque l’infinità dei punti di una superficie è ancora $\aleph$.

E così per i punti dello spazio tridimensionale (o di una sua figura qualsiasi)!

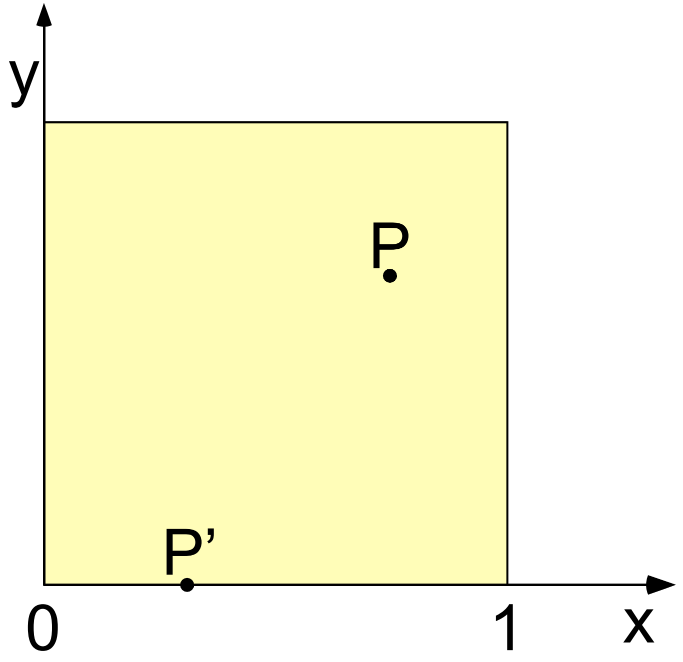
Lo vedo, ma non ci credo

Lettera di Cantor a **Richard Dedekind (1831-1916)**, Halle (Sassonia), 29 giugno 1877

Una varietà continua a p dimensioni, con p>1, può essere messa in relazione (bi-)univoca con una varietà continua a una dimensione, in modo tale che ad un punto dell'una corrisponda un punto ed uno solo dell'altra?

Fintanto che voi non mi avrete approvato, io non posso che dire: ***lo vedo, ma non ci credo****.*

Un esempio della dimostrazione di Cantor



Vi sono tanti punti nella superficie di un quadrato

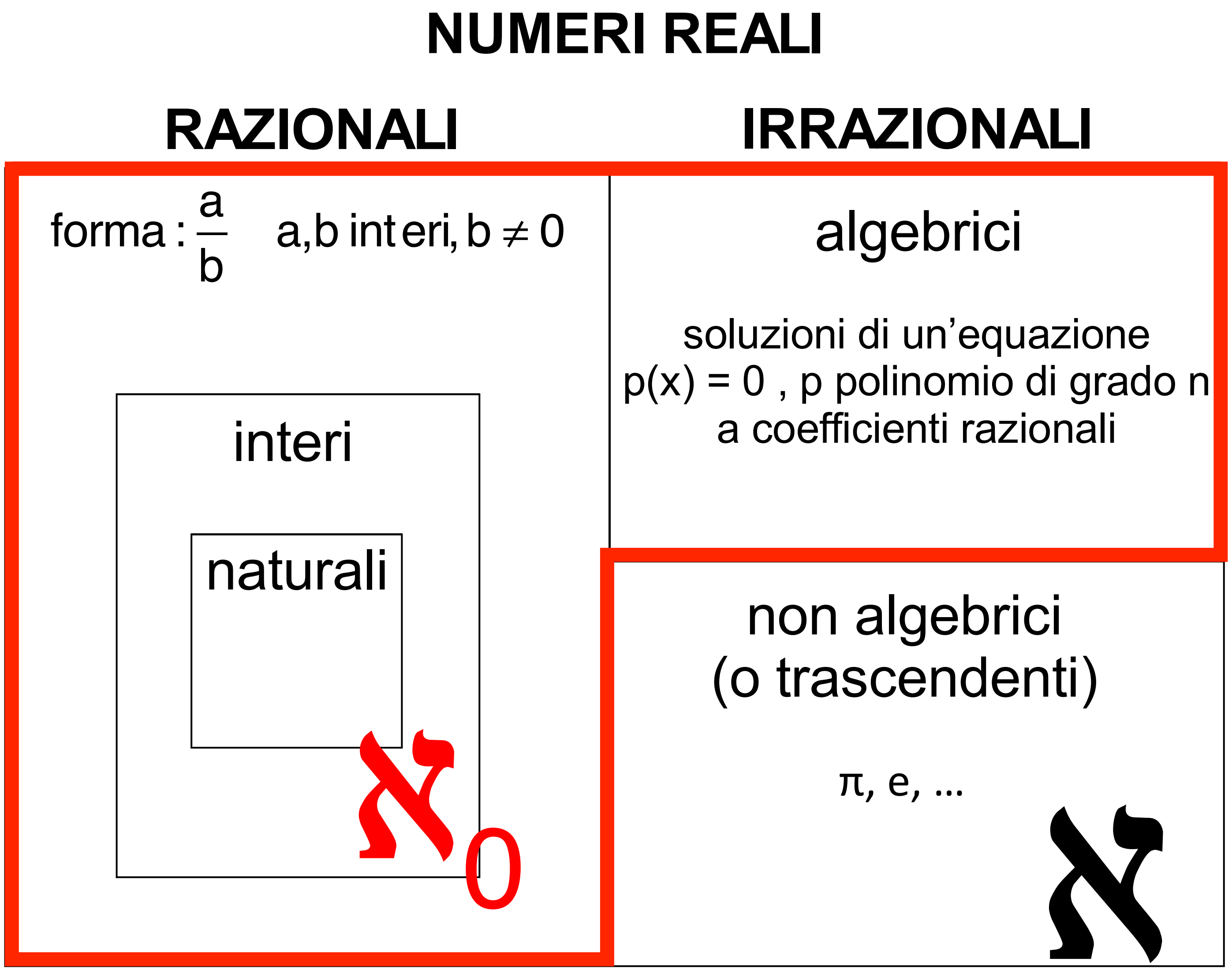
quanti sono i punti di un suo lato.

$$P(0, a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7\ldots; 0, b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7\ldots) \quad \text{2-D}$$

$$\updownarrow \qquad \updownarrow$$

$$P'(0, a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4a_5b_5a_6b_6\ldots) \quad \text{1-D}$$

Inserto: l’insieme dei numeri reali



NUMERI REALI

RAZIONALI

IRRAZIONALI

forma : $\frac{a}{b}$ a,b interi, $b \neq 0$

interi

naturali

$\aleph_0$

algebrici

soluzioni di un’equazione
p(x) = 0 , p polinomio di grado n
a coefficienti razionali

non algebrici
(o trascendenti)

π, e, ...

$\aleph$

Finalmente!

Cantor ha un'illuminazione: confronta la cardinalità di un insieme A con quella dell'insieme P(A) delle sue parti.

Proviamo anche noi, facendo capo al

triangolo di Tartaglia (italiano, XVI secolo)

o di Pascal (francese, XVII secolo)

o di Khayyàm (persiano, XII secolo),

o di Yang Hui (cinese, XIII secolo)

noto anche ai nostri studenti.

L’insieme delle parti

nr.el. di A	parti di A	triangolo	nr. delle parti di A
0	ϕ	1	$1 = 2^0$
1	ϕ A	1 1	$1+1 = 2^1$
2	ϕ {x} {y} A	1 2 1	$1+2+1 = 2^2$
3	ϕ {x} {y} {z} {x,y} {x,z} {y,z} A	1 3 3 1	$1+3+3+1 = 2^3$
4	ϕ {x}{y}{z}{w}{x,y}{x,z}{x,w}{y,z}{y,z}{z,w} {x,y,z}{x,y,w}{x,z,w}{y,z,w}A	1 4 6 4 1	$1+4+6+4+1 = 2^4$
…		…	… …
n		…	… 2^n

Quindi: un insieme A di n elementi ha 2^n sottoinsiemi.

Finale: gli infiniti infiniti

Cantor afferma che la formula appena vista è valida anche se n è un numero infinito. Quindi:

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} (= \aleph) < 2^{\aleph}$$

A questo punto il "gioco" può continuare!

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < 2^{2^{2^{\aleph_0}}} < 2^{2^{2^{2^{\aleph_0}}}} < \ldots$$

E questa è la successione dei **numeri infiniti** di Cantor, detti anche **numeri transfiniti**.

Grazie dell'attenzione

Indirizzi utili:

gianar76@gmail.com

giorgio.mainini@ticino.com

www.smasi.ch

smasi

società matematica svizzera italiana