Perché il matematico non gioca d'azzardo

SMASI

Società Matematica della Svizzera Italiana, Lugano
Gianfranco Arrigo

Girolamo Cardano (1501–1576)

Opera fondamentale: *Liber de ludo aleae*
pubblicata postuma nel 1663

Esempi tratti dal *Liber de ludo aleae*

Qual è la probabilità di ottenere il valore 1 almeno una volta, lanciando due dadi?

(1,1)

(1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6) e i “gemelli”

(2,1) (3,1) (4,1) (5,1) (6,1)

In totale si hanno 11 possibilità su 36, ciò che equivale alla probabilità 11/36 ≅ 0,3 (30%)

Il risultato può anche essere ottenuto mediante una una tabella:

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

I casi che interessano si trovano nella prima riga e nella prima colonna. 11 su 36, cioè la probabilità di ottenere almeno un 1 è 11/36.

Altro modo di risolvere il problema

La probabilità di ottenere nessun 1 su un dado è 5/6

La probabilità di ottenere nessun 1 in entrambi i dadi è

$5/6 \cdot 5/6 = 25/36$

Perciò la probabilità di ottenere almeno un 1 con i due dadi è

$1 – 25/136 = 11/36$

Qual è la probabilità di ottenere il valore 1 almeno una volta, lanciando **tre** dadi?

Stima: minore, uguale o maggiore di quella con due dadi?

Se usiamo il metodo appena visto, abbiamo:

probabilità di ottenere nessun 1 su ciascuno dei tre dadi:

$5/6 \cdot 5/6 \cdot 5/6 = 125/216$

perciò la probabilità di ottenere almeno un 1 con i tre dadi è

$1 - 125/216 = 91/216 \cong 0{,}42$ (42% invece di 30%)

Calcolare la probabilità di ottenere una data somma addizionando i risultati di due o tre dadi

Con due dadi, torna utile la tabella già vista, opportunamente completata:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Il 7 è il risultato più probabile, seguito da 6 e 8.

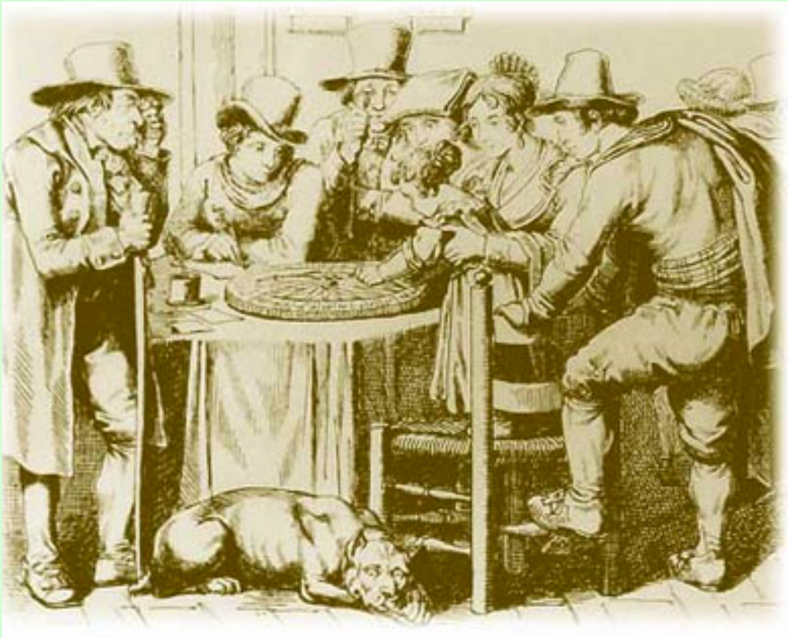
Lancio di tre dadi: il gioco della zara (Medioevo)

Si giocava con tre dadi: a turno ogni giocatore chiamava un numero da 3 a 18, quindi gettava i dadi.

Vinceva se otteneva la somma pari al numero chiamato.

L'attenzione è centrata sulla **somma dei punti** usciti sui tre dadi lanciati insieme e sul calcolo delle **probabilità associate a ogni somma possibile**.

Il problema è stato affrontato anche da Galileo Galilei nel suo trattato del 1596:
Sopra le scoperte dei dadi
e da Girolamo Cardano nel ***Liber de ludo aleae*** pubblicato nel 1663, ma scritto attorno al 1550.



Il calcolo è un po’ più complesso del lancio di 2 dadi.

Possiamo però sfruttare i risultati di Cardano:

Sortis		
3	18	1
4	17	3
5	16	6
6	15	10
7	14	15
8	13	21
9	12	25
10	11	27

La prima riga va letta così:

Le somme **3** e **18** si possono ottenere in **1** solo modo

e così le altre.

Cardano, opportunamente, si ferma alla somma 10, perché le altre si allineano in modo simmetrico.

Per esempio

p(11) = p(10) = 27/216

Cenni storici

Girolamo Cardano (1501-1576): ***Liber de ludo aleae*** (1663)

Galileo Galilei (1564-1642): ***Sopra le scoperte dei dadi*** (1596)

Blaise Pascal (1623-1662): ***Traité du Triangle Arithmétique*** (1654), che permette di calcolare facilmente i coefficienti binomiali, detti anche coefficienti combinatori

Pierre de Fermat (1601-1665): corrispondenza con Pascal sui problemi posti da de Méré

Christiaan Huygens (1629–1695): ***De ratiociniis in ludo alae*** (1657)

Pierre Rémond de Montmort (1678-1719): ***Essai d'Analyse sur le jeux de hazards*** (1708)

Cenni storici

Jakob Bernoulli (1654-1705): ***Ars conjectandi*** (1713) nella quale enuncia la ***La legge dei grandi numeri***

Carl Friedrich Gauss (1777-1855): la curva della distribuzione normale (detta volgarmente «gaussiana»)

Jarl Waldemar Lindeberg (1876-1932): dimostra **il teorema del limite centrale** che assegna alla distribuzione normale di Gauss un ruolo basilare

Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987): nel 1933 pubblica il sistema assiomatico della teoria della probabilità

Da questo momento, l'intera comunità dei matematici accoglie (finalmente!) il «Calcolo delle probabilità» come branca essenziale della matematica, sullo stesso piano delle tradizionali Algebra, Analisi e Geometria.

Un secolo dopo Cardano

cavaliere
De Méré
(1607 - 1684)
Scrittore
e giocatore

Blaise
Pascal
(1623 - 1662)
matematico
e filosofo

Pierre
de Fermat
(1601 - 1665)
matematico

I giochi del Cavaliere de Méré

Siamo nel XVII secolo, nel periodo di transizione tra Rinascimento e Illuminismo, che spesso è indicato come epoca segnata dalla violenza e dal declino.

Nei salotti di Parigi appare un personaggio, ricordato come il Cavaliere de Méré, accanito giocatore d'azzardo, amico dei due matematici Blaise Pascal e Pierre de Fermat.

A entrambi il Cavaliere pone domande sul gioco, con la speranza di riuscire a migliorare il suo patrimonio di giocatore.

Alcuni storici fissano in questo periodo la nascita del calcolo delle probabilità, anche se il gioco d'azzardo è sempre stato presente nell'umanità e con esso un minimo di riflessione matematica.

Modello matematico del gioco d'azzardo

Nel modello matematico si distinguono le variabili basilari:

- La posta giocata PO
- Un fattore che moltiplica la posta FA
- La somma ricevuta in caso di vittoria $SR = FA \cdot PO$
- La probabilità di vittoria PV
- La speranza di vincita $VE = PV \cdot (FA - 1) \cdot PO - (1 - PV) \cdot PO$

Se il gioco è favorevole al Giocatore, dev'essere:

$VE > 0$, cioè $PV \cdot FA - PV - 1 + PV > 0$

cioè $\mathbf{RE = PV \cdot FA > 1}$ (RE lo chiamiamo rendimento del gioco)

Se $RE > 1$ il gioco è favorevole al Giocatore

$RE < 1$ il gioco è sfavorevole al Giocatore

de Méré vuole sapere…

Primo gioco

Il Giocatore lancia un dado per 4 volte. Vince se esce il numero 6 almeno una volta. In tal caso riceve il doppio della posta.

Il gioco è favorevole al giocatore?

Calcoliamo la probabilità di vincere:

$$PV = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cong 0,518$$

Di conseguenza il rendimento è:

RE = PV · FA = 0,518 · 2 = 1,036 > 1

Il gioco è favorevole al Giocatore (di poco!).

de Méré chiede, Pascal sbaglia e Fermat corregge

Secondo gioco

Il giocatore lancia due dadi 24 volte.
Se esce almeno una volta un doppio 6, vince il doppio della posta.
De Méré era convinto che il rendimento di questo gioco fosse lo stesso di quello precedente. Pascal gli dà ragione, ma Fermat non è d'accordo…

Calcoliamo la probabilità di vincere:

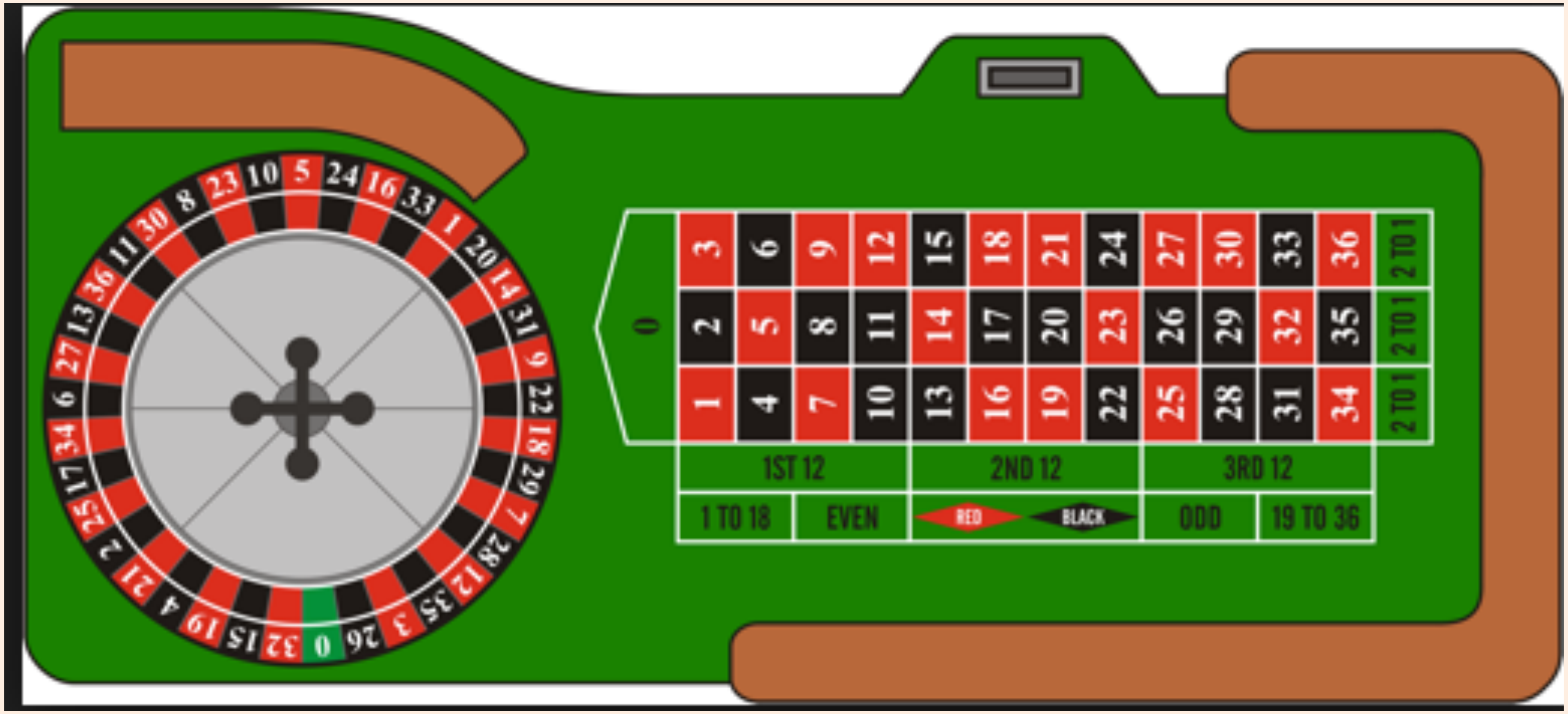
$$PV = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \cong 0{,}491$$

Di conseguenza il rendimento è:

RE = PV · FA = 0,491 · 2 = 0,982 < 1.   Il gioco è favorevole al Banco (di poco).

Ma se fosse FA=3, il gioco tornerebbe favorevole al giocatore.

I grandi giochi: la Roulette



Sulla ruota della roulette sono disposti, secondo rigidi criteri di alternanza, i numeri da 1 a 36, metà Rossi e metà Neri, e lo 0, di colore verde, che procura le entrate al Casinò.

Gli stessi numeri sono riportati sul tappeto verde delle scommesse, allineati su 3 colonne, ciascuna composta di 12 righe.

Roulette: esempi di giocate

Giocata secca (detta en plein): se si azzecca il numero, si riceve (36 volte la posta giocata (PO=36), quindi

RE = PV · FA = 1/37 · 36 = 36/37 ≅ 0,973 < 1
e perciò il gioco favorisce il Casino (di poco!).

Proviamo con Il *Carré* (4 numeri); se esce uno di essi si riceve 8 volte la posta; vi sono 4 casi possibili, quindi

RE = PV · FA = 4/37 · 8 = 32/37 ≅ 0,865 < 1
di nuovo il Casino è favorito.

Proviamo con la *Douzaine*, (12 numeri); se esce uno di essi si riceve 3 volte la posta; vi sono 12 casi possibili, quindi
RE = 12/37 · 3 = 36/37 ≅ 0,973 < 1
di nuovo il Casino è favorito.

A lungo andare, non c’è speranza di vincere.

Epilogo: la rovina del giocatore

Il destino di un qualsiasi Giocatore di fronte a un gioco d'azzardo a lui non favorevole è segnato, anche se in taluni casi è possibile vincere (e qui sta la malizia del gioco!).

Nessun Banco (un Casino, lo Stato, una Società o un qualunque privato che propone il gioco) si metterebbe in testa di offrire giochi a esso sfavorevoli, ma non ha nemmeno interesse a offrire giochi troppo sfavorevoli al Giocatore, perché correrebbe il rischio di rimanere senza clienti. Grandi vincite (anche se rare, ma convenientemente comunicate) attraggono i giocatori.

La Roulette dei Casino è un esempio evidente. Come abbiamo visto il rendimento del gioco è solo **di poco** inferiore a 1. Raramente si sente parlare di giocatori in rovina, sempre di chi azzecca grandi vincite.

File: <Rovina del giocatore.xlsx>

Simulazione

Grazie dell'attenzione

Indirizzi utili:

gianar76@gmail.com
giorgio.mainini@ticino.com
www.smasi.ch