Grafi e parità

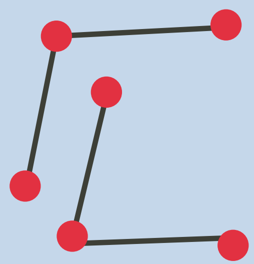
Due concetti matematici
poco conosciuti

Gianfranco Arrigo
SMASI Lugano

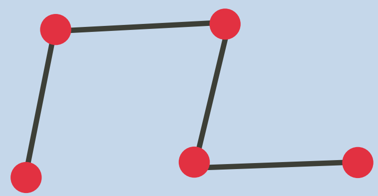
Grafi

Sono strutture geometriche discrete composte di **vertici** (punti) e **spigoli** (linee). Ogni spigolo congiunge due vertici.

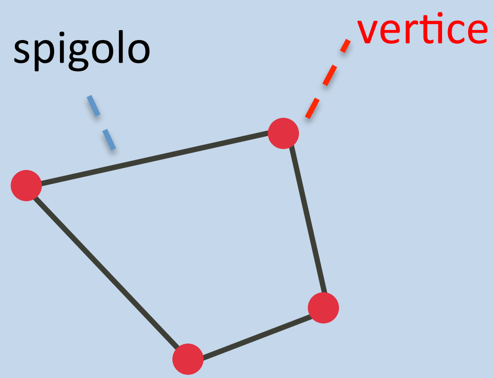
Esempi semplici



Grafo non connesso



Poligonale aperta



Poligonale chiusa

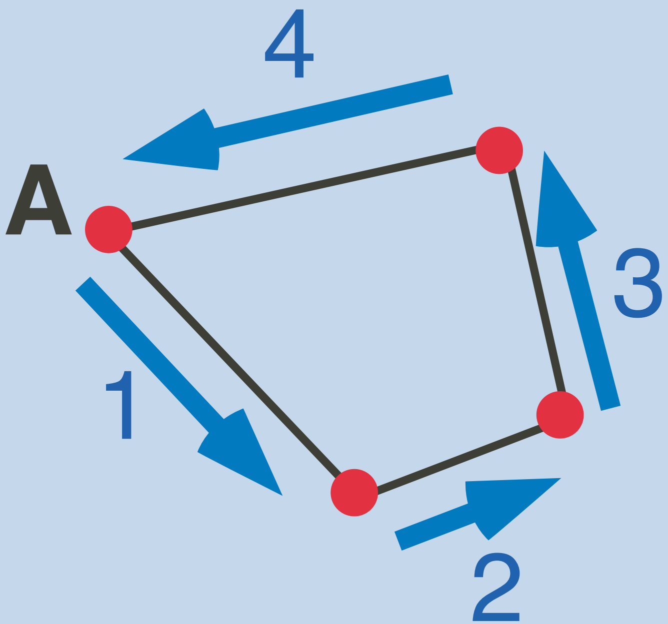
Si dice **grado locale** di un vertice A il numero di spigoli che partono da A.

Esempio: nella poligonale aperta, gli estremi hanno grado 1 e gli altri vertici hanno grado 2

Grafi euleriani

Un grafo connesso si dice **euleriano** se esiste un percorso che passa per tutti i suoi vertici e che percorre una e una sola volta ogni spigolo.

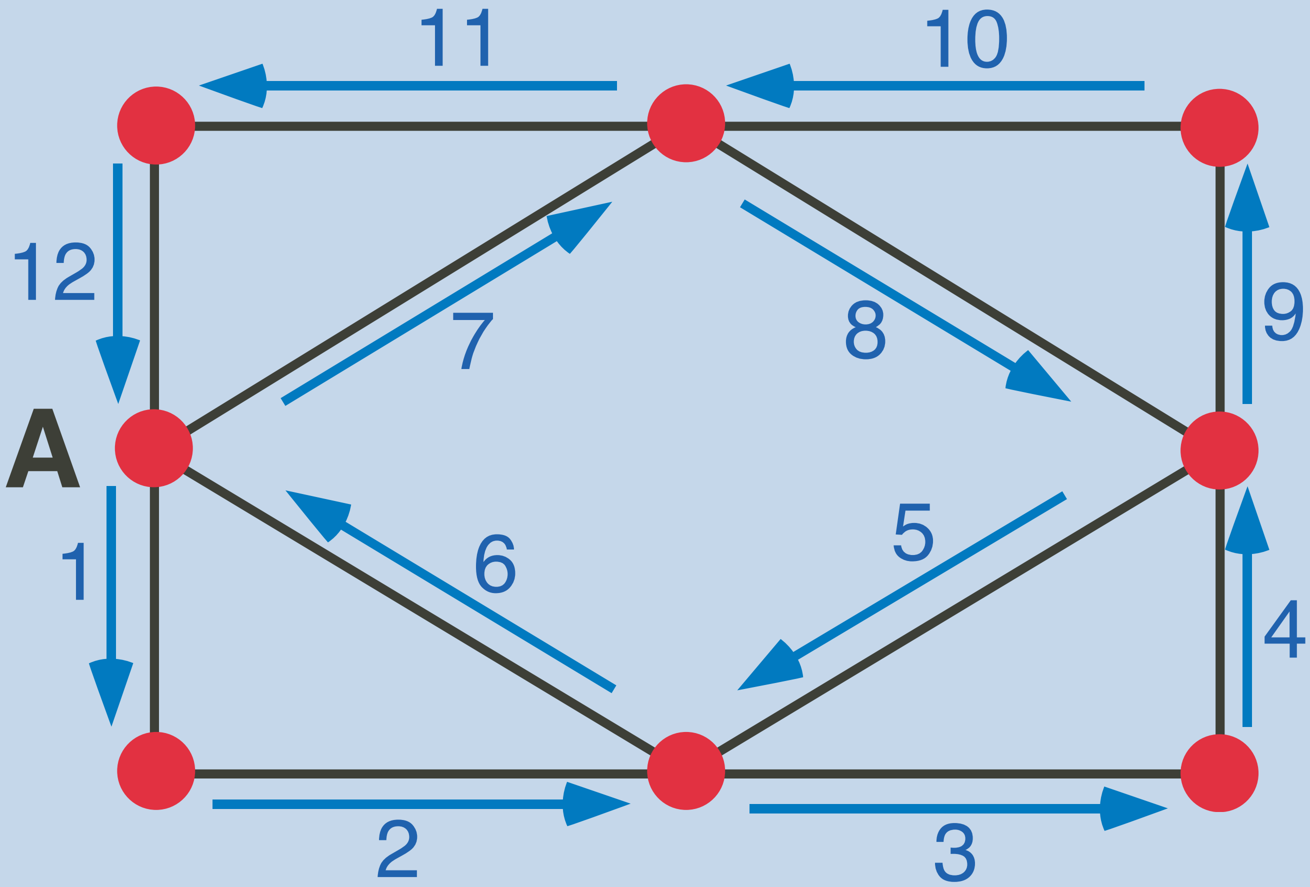
Esempio semplice:



Grafi euleriani

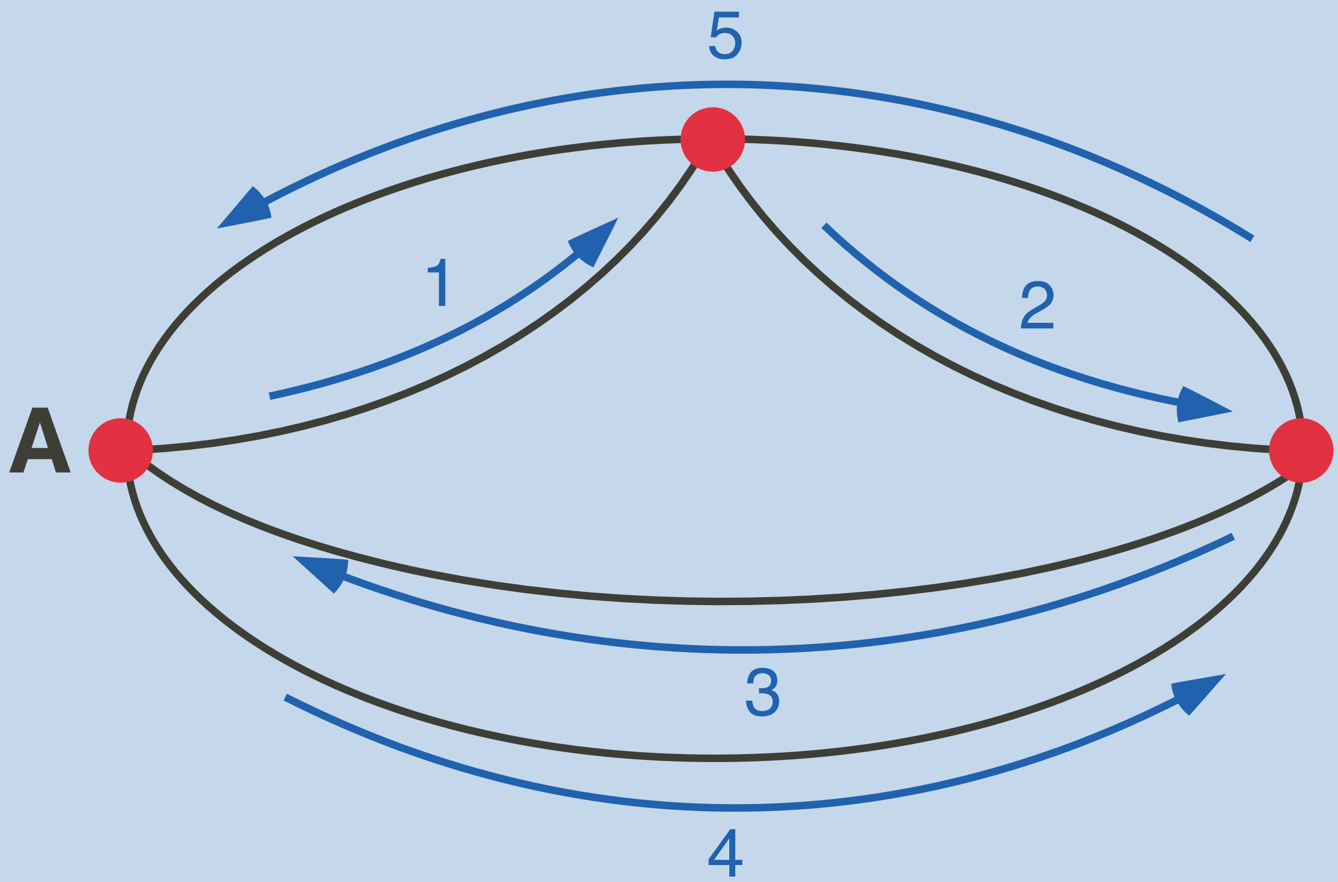
Un grafo connesso con i gradi locali pari è euleriano.

Esempi



Grafi euleriani

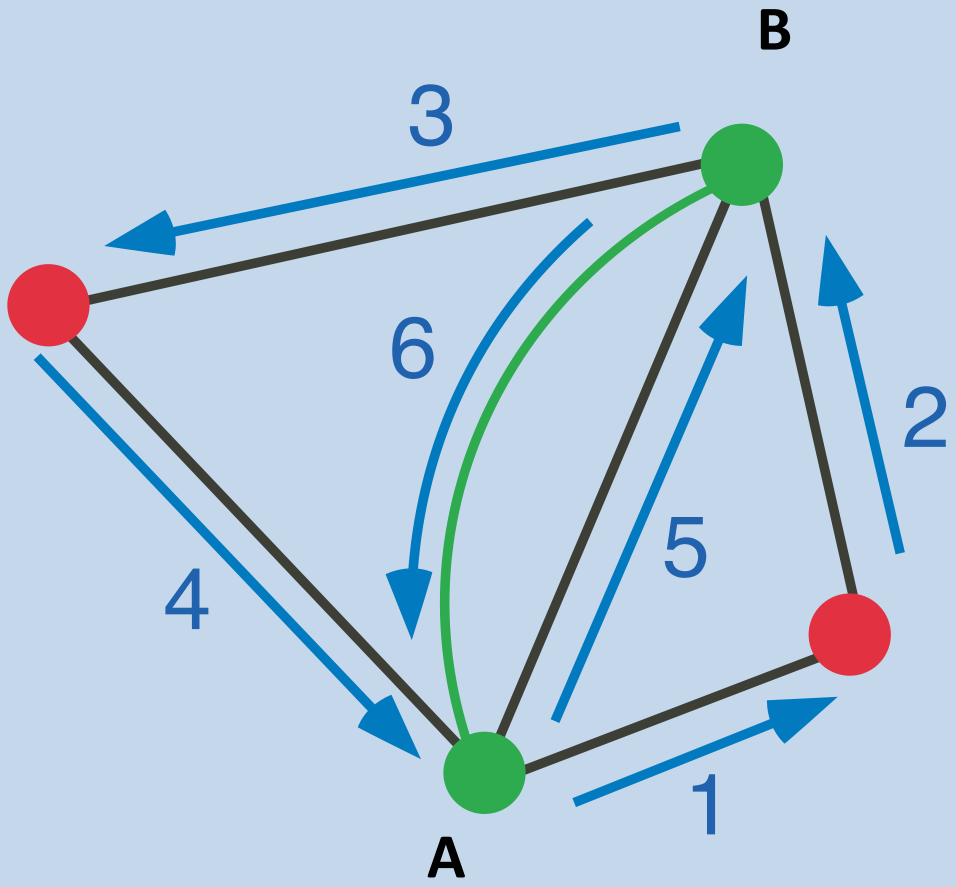
Gli spigoli di un grafo non devono necessariamente essere dei segmenti di retta.



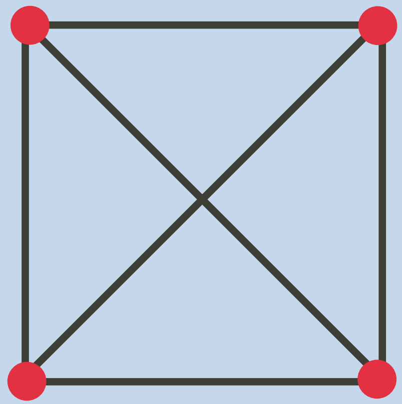
Grafi euleriani

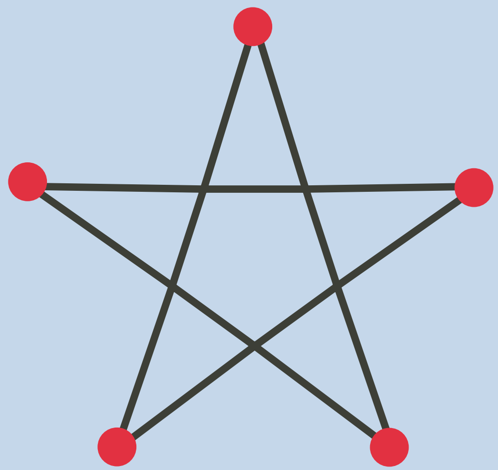
Ogni grafo che possiede esattamente 2 vertici di ordine dispari è euleriano.

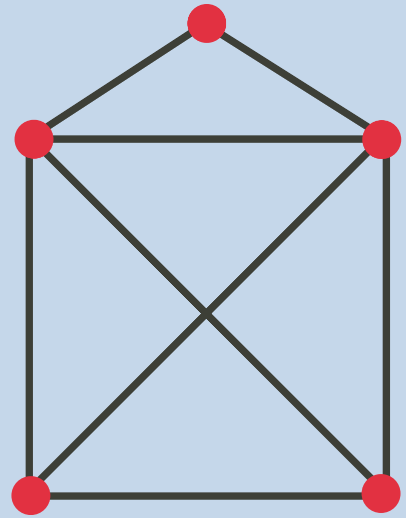
Vediamo il perché con un esempio.

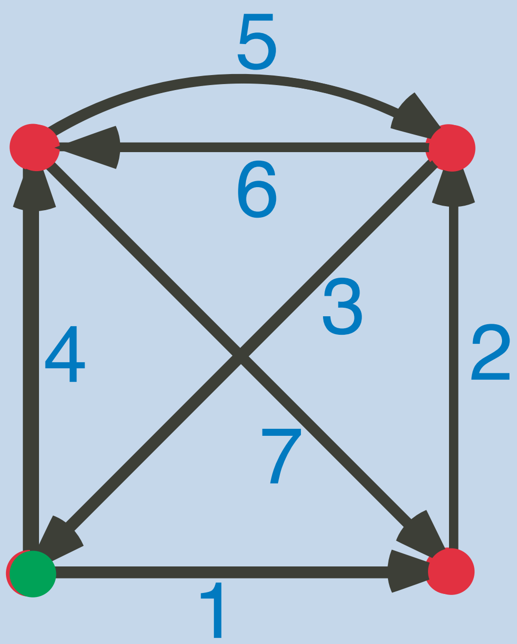


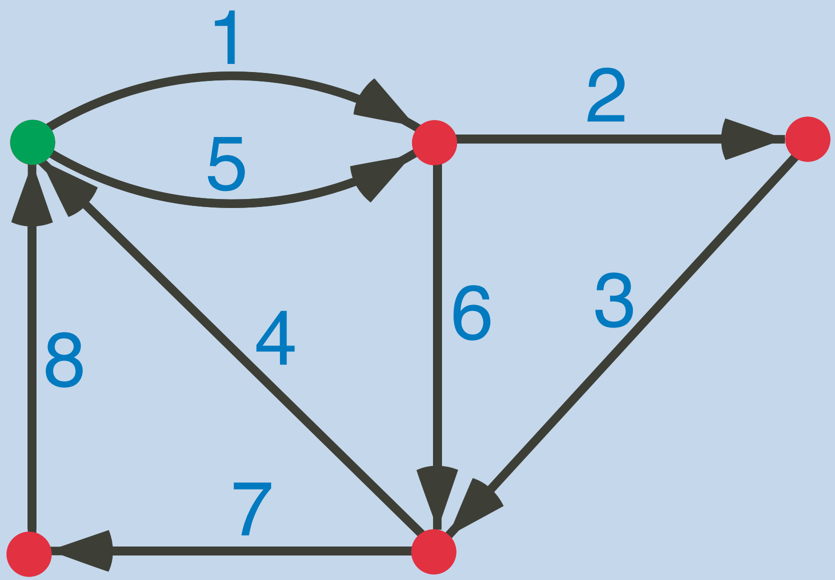
Grafi euleriani e no: altri esempi





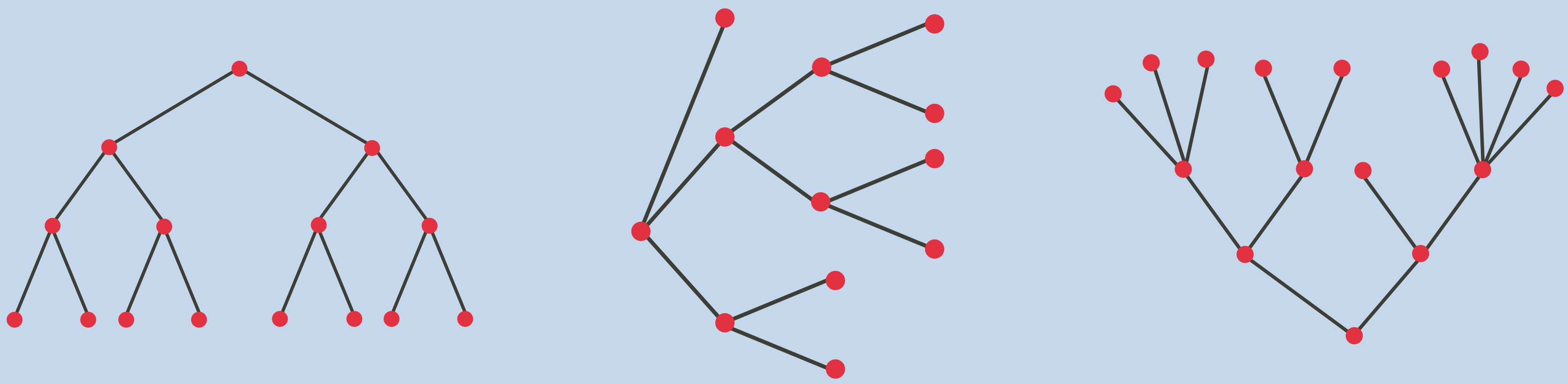






Gli alberi nella risoluzione di problemi

Un **albero** è un grafo orientato privo di percorsi chiusi. Esempi:



Gli spigoli sono tutti orientati e i loro vertici sono distinti: vertice **padre** e vertice **figlio**.
In ogni vertice padre entra uno spigolo (o nessuno) e dal corrispondente vertice figlio possono uscire da 0 a n spigoli.

Gli alberi sono molto utili nella risoluzione di problemi.

Vediamo due esempi.

Gli alberi nella risoluzione di problemi

Abdul e il sultano

Adattamento di un gioco tratto da Gamow e Stern, (1961), *Jeux mathématiques*, Paris: Dunod, p. 14-16.

Il suddito Abdul si è macchiato di una grave colpa e viene condannato a morte. Il sultano Ibn-al-Kuz , un sovrano ispirato e teso a trasformare il sultanato in uno stato moderno, fa portare due urne e fa inserire tre palline bianche nella prima e tre palline nere nella seconda. Il condannato, con gli occhi bendati è invitato a scegliere un'urna dalla quale estrarre una pallina. Se questa sarà bianca, il condannato sarà liberato, altrimenti verrà giustiziato.

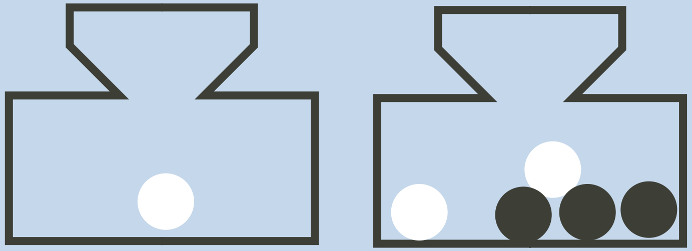
A questo punto Abdul chiede un ultimo desiderio: poter ridistribuire le palline nelle due urne, ciò che gli viene concesso perché, dice il gran vizir, ci saranno sempre tre palline bianche e tre nere.

Così facendo, Abdul ha aumentato la probabilità di sopravvivere?

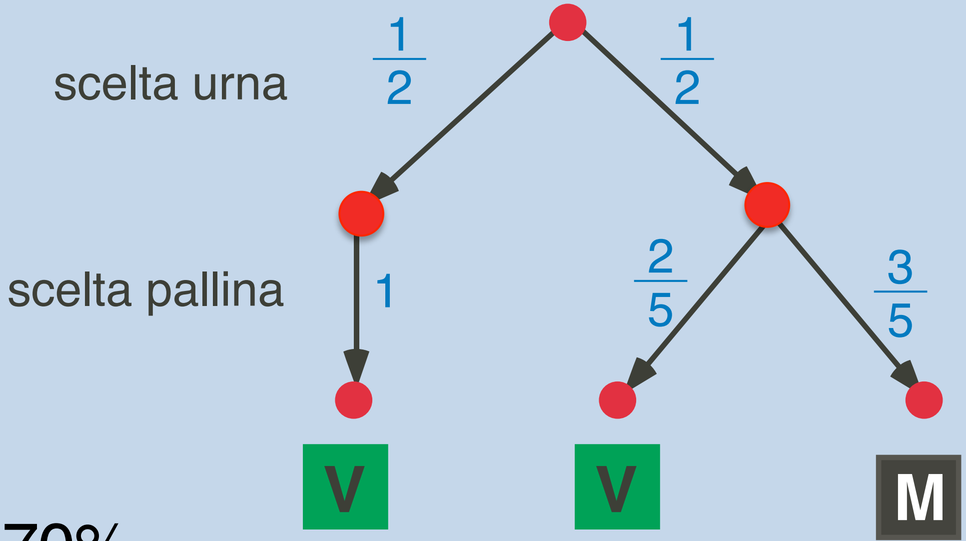
Gli alberi nella risoluzione di problemi

Sì, l'ha aumentata considerevolmente. Vediamo perché. Con la distribuzione iniziale, Abdul aveva una possibilità su due (probabilità 0,5=50%) di scegliere l'urna con le palline bianche e quindi di salvarsi.

Ecco come Abdul ridistribuisce le palline:



Albero risolutivo



Calcolo:

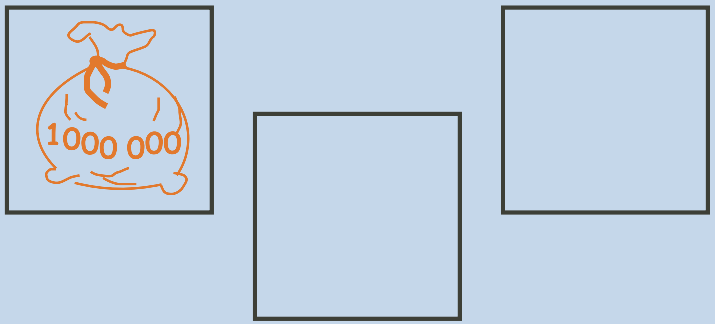
$$P(V) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{7}{10} = 0{,}7 = 70\%$$

Gli alberi nella risoluzione di problemi

Il dilemma di Monty Hall

Ci sono tre contenitori A, B, C e in uno solo di essi il gestore del gioco pone un ricco premio.

Chiede a uno dei presenti di provare a indovinare dove sta il premio.



Il giocatore sceglie, per esempio, il primo contenitore, ma non lo apre.

Il gestore apre un contenitore vuoto, lo mostra al giocatore e gli propone di cambiare la scelta iniziale.

Il giocatore farà bene a cambiare, oppure no?

Gli alberi nella risoluzione di problemi

Il **problema di Monty Hall** è diventato famoso grazie al gioco televisivo statunitense *Let's Make a Deal.*

Prende il nome dal conduttore dello show, Maurice Halprin, noto con lo pseudonimo di Monty Hall.

Nel gioco vengono mostrate al concorrente tre porte chiuse; dietro a una si trova una lussuosa automobile, mentre ciascuna delle altre due nasconde una capra.

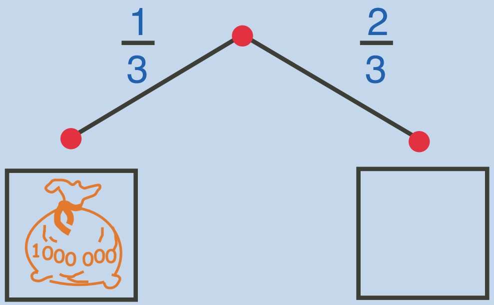
Il resto lo conosciamo.

Negli USA Il gioco suscitò un’accesa controversia finita anche sulla rivista "Parade" nel 1990.

In realtà si tratta di una variante del “Paradosso delle tre carte” di Warren Weaver (1950) il quale, a sua volta, l’aveva preso dal “Paradosso delle tre scatole” proposto dal matematico francese Joseph Bertrand nel 1889.

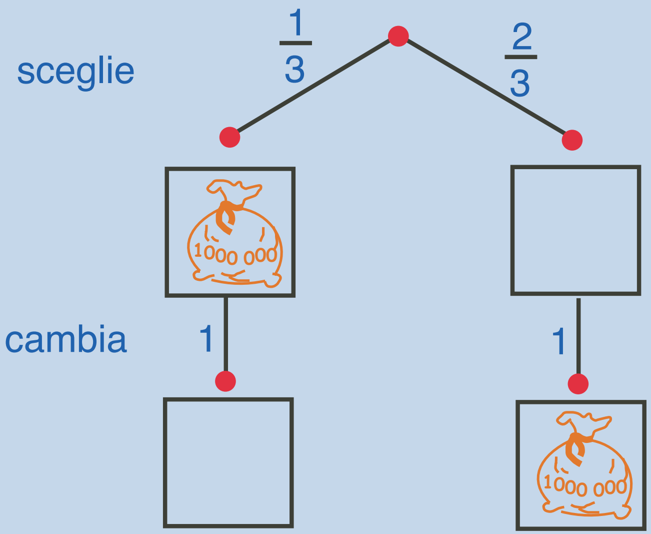
Gli alberi nella risoluzione di problemi

Se il giocatore rimane sulla scelta iniziale…



Probabilità di vincere il premio: $\frac{1}{3}$

Se il giocatore cambia la scelta iniziale…



Probabilità di vincere il premio:

$$\frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

Problemi centrati sulla parità

Prismi e piramidi: colorare le facce

Condizione: due facce adiacenti non possono essere dello stesso colore.

Ci interessa sapere quanti colori **al minimo** necessitano per dipingere le facce di un dato solido (prisma o piramide).

Un paio di domande per iniziare

- È vero che il solido che ha più facce è quello che richiede più colori?

- Esiste una relazione tra il numero di facce del solido e il numero minimo di colori necessari?

I poliedri: colorare le facce

È consigliabile ragionare su modellini dei solidi.
Completiamo la seguente tabella:

Nome del solido	**Nr. lati della faccia caratteristica**	**Nr. min. colori**
tetraedro	3	4
parallelepipedo	4	3
prisma pentag.	5	4
prisma esag.	6	3
piramide ettag.	7	4
piramide ottag.	8	3

Il numero minimo di colori (4 oppure 3) dipende dalla **parità** dei lati della faccia caratteristica.

Problemi centrati sulla parità

L’amnistia (da un’idea di Arthur Engel, 1972)

Nella lontana Repubblica di Sikinia si celebra l’anniversario della costituzione. Per l’occasione, il presidente decide di concedere l’amnistia a un certo numero di carcerati.

La prigione si compone di 100 celle, numerate da 1 a 100. In ogni cella c’è un carcerato. La porta di ogni cella, sull’esterno, ha una maniglia che può essere girata in due sole posizioni: aperta (A) o chiusa (C).

All’inizio tutte le maniglie sono messe in posizione C. Il presidente, amante dei giochi matematici, dà al secondino l’ordine seguente.

Inizia dalla cella 1 e, una dopo l'altra, gira tutte le maniglie.

Poi ritorna all'inizio e gira, partendo dalla 2, le maniglie di tutte le celle di numero pari.

Di nuovo torna all'inizio e, partendo dalla cella numero 3, gira tutte le maniglie delle celle dal numero divisibile per 3.

Poi fa la stessa cosa con le celle divisibili per 4, poi con quelle divisibili per 5, e così via fin che l'ultima fatica sarà quella di girare solo la maniglia della cella 16 partendo dalla cella numero 100.

Quali celle risulteranno aperte alla fine, permettendo così al carcerato che le occupa di uscire di prigione?

L'amnistia: traccia di soluzione

Rimarranno aperte alla fine le celle la cui maniglia viene azionata un numero **dispari** di volte, per esempio:

1 volta, **C**➔A, 3 volte **C**➔A➔C➔A , ecc.

La maniglia di una cella numero n viene azionata dal secondino quando passa per la k-esima volta, con k divisore di n. Per esempio, la maniglia della cella 6 viene azionata ai passaggi 1, 6, 2, 3 e basta.

Verrà liberato il prigioniero della cella numero q solo se q ha un **numero dispari di divisori**.

I divisori di un numero q si possono appaiare: $q = d_1 \times d_2$

Quando saranno in numero dispari? Quando ci sarà una coppia (d_1 ; d_1), cioè quando q è un **numero quadrato**.

Grazie dell'attenzione

Gianfranco Arrigo
SMASI Lugano
gianar76@gmail.com