1. MISCELLANEA DI PROBLEMI
(a cura di Giorgio Mainini)

1.1 Pari o dispari?

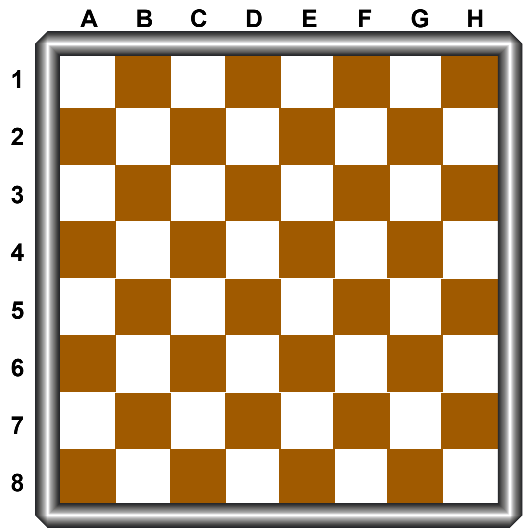
Un giardiniere vuole creare una aiuola piantandovi margherite e primule in modo che formino un quadrato. Ma vuole che in ogni riga ci sia esattamente una pianticella di primule: tutte le altre pianticelle devono essere margherite.

Domande
Il numero di pianticelle di margherite sarà pari o dispari?
Il risultato dipende o no dal numero di righe (uguale a quello delle colonne)?

Rilancio
Il giardiniere vuole creare una aiuola rettangolare, con lo stesso vincolo (esattamente una pianticella di primule in ogni riga).

Domande
Il numero di pianticelle di margherite sarà pari o dispari?
Dipende o no dal numero di righe (diverso da quello delle colonne)?

1.2 Fuga del Re



Un Re si trova in A1 e vuole fuggire in H8.
Domanda
Se passa da una casella a un'altra di colore diverso a ogni passo, quanti percorsi diversi può seguire?

Perché il problema abbia soluzione bisogna imporre due vincoli al movimento del Re:
- quando ha raggiunto una colonna, non può tornare su una colonna "alfabeticamente" precedente
- quando ha raggiunto una riga, non può tornare su una riga "numericamente" precedente.

Attenzione: si parla di **percorsi diversi**, non di lunghezza dei percorsi. Per esempio:
- per andare da A1 a D1 c'è **un solo percorso**: (A1 – B1 – C1 – D1) che è lungo 3 passi;
- anche per andare da A1 a E1 c'è **un solo percorso**: (A1 – B1 – C1 – D1 – E1), lungo 4 passi.
- per andare da A1 a B2 ci sono **due percorsi diversi**: (A1 – B1 – B2) e (A1 – A2 – B2), anche se entrambi sono lunghi 2 passi.

La tabella che segue vuol essere una traccia per la soluzione:

L	A	M	A	T	E	P	U	Ò	D
A	M	A	T	E	P	U	Ò	D	I
M	A	T	E	P	U	Ò	D	I	V
A	T	E	P	U	Ò	D	I	V	E
T	E	P	U	Ò	D	I	V	E	R
E	P	U	Ò	D	I	V	E	R	T
P	U	Ò	D	I	V	E	R	T	I
U	Ò	D	I	V	E	R	T	I	R
Ò	D	I	V	E	R	T	I	R	E
D	I	V	E	R	T	I	R	E	!

Variante per chi ama qualche difficoltà in più
Se il Re può muoversi come di solito si muove un Re, e mantenendo gli stessi due vincoli, quanti percorsi può seguire?

1.3 Nella vecchia fattoria

In una fattoria si allevano galline e conigli. Un certo giorno c'erano 36 zampe.

Domande
- Quante erano le galline e quanti i conigli?
- Se le zampe fossero state 38 come cambierebbe la soluzione?
- Diofanto, chi era costui?

1.4 Nella nuova fattoria

Da un terreno si ricavano 21 quintali di patate per ettaro; da un altro 35 quintali di colza per ettaro. Un certo anno, dice il coltivatore, ho prodotto in tutto 250 quintali.

Domanda
Quanti ettari erano stati coltivati a patate e quanti a colza?

1.5 Il giornalista negligente

Un articolo di giornale, prima della pandemia da Covid-19, ha riferito quanto segue:

> L'Unione Sportiva di Pensate sul Serio ha organizzato due tornei di calcio: uno fra sei squadre di under 18 e l'altro fra cinque squadre di under 16 con le seguenti regole:
> - ogni squadra incontra tutte le altre una sola volta;
> - ogni partita dura due tempi di 30 minuti con un intervallo di 10;
> - se alla fine dei due tempi le squadre sono in parità, ogni squadra calcia cinque rigori;
> - se anche dopo i rigori si ha parità, si procede al sorteggio;
> - la squadra che vince ottiene due punti, la perdente zero punti.
>
> Ebbene, entrambi i tornei sono finiti con le squadre con lo stesso numero di punti. Il raro fenomeno ha indotto i dirigenti dell'US a dichiarare tutte le squadre vincitrici a pari merito.

L'articolista è stato aspramente rimproverato dal direttore del giornale.
Domanda
Perché?

1.6 Una lingua artificiale

Per "parlare" con un computer bisogna usare una lingua artificiale, costruita ad hoc.
Come esempio di parole di una lingua artificiale propongo questo:

1. le parole contengono solo le lettere C e D;
2. la parola C esiste;
3. la parola D non esiste
4. se esiste la parola X esiste anche la parola CX;
5. se esiste la parola X esiste anche la parola XD (dove X è una parola formata solo di C e D);
6. ogni parola ha al massimo 6 lettere.

Domanda
Quali e quante sono le parole della lingua?

1.7 "Ah ah ah!", che risata!

Ecco un modo di costruire risate matematiche:

1. si comincia con A;
2. nella parola precedente si sostituiscono tutte le A con H e tutte le H con AH;
3. si torna a 2. fin che si vuole.

Chiamiamo "lunghezza di una parola" il numero delle lettere che la compongono.

Domanda
Prepara una tabella come quella che segue, costruisci le risate, conta le A e le H, misura la lunghezza delle parole e riporta nella tabella i numeri che hai trovato.

	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	…
Risate	A						
Nro. di A							
Nro. di H							
Lunghezza della parola							

Complemento
Una fila di numeri in un dato ordine si chiama **successione**:
studia le tre successioni che hai trovato e troverai che hanno a che fare con un matematico vissuto a cavallo tra il XII e il XIII secolo.

1.8 Disattenzioni

Una signora è andata al supermercato e ha comperato quattro oggetti, poi, per errore, invece di sommare i loro prezzi, li ha moltiplicati: il risultato è stato 5005 CHF.
Anche suo fratello è un po' imbranato: ha comperato tre oggetti e ha commesso lo stesso errore, ottenendo 1911 CHF.
Tutti gli oggetti costavano un numero intero di franchi.

Domanda
Quanto costava ogni oggetto?

1.9 Automi cellulari

Un **automa cellulare** è una collezione di **celle** "colorate" (ogni "colore" si chiama **stato** della cella), disposte su una **griglia** di forma specificata, che evolve passo passo nel tempo seguendo un insieme di **regole di transizione** basate sugli stati delle celle **vicine**. Le regole sono poi applicate iterativamente, tante volte quante se ne vogliono.
Di automi cellulari ce ne sono di moltissimi tipi.

Una delle proprietà fondamentali di un automa cellulare è il tipo di griglia sulla quale è disposto.

Il tipo più semplice di griglia è una linea, quindi ad una dimensione, da immaginare come una fila infinitamente lunga di quadratini di vari colori.

In due dimensioni le griglie possono essere quadrate, triangolari o esagonali.
Si considerano anche griglie a tre o più dimensioni: le celle sono allora solidi o ipersolidi che "pavimentano" lo spazio o l'iperspazio.

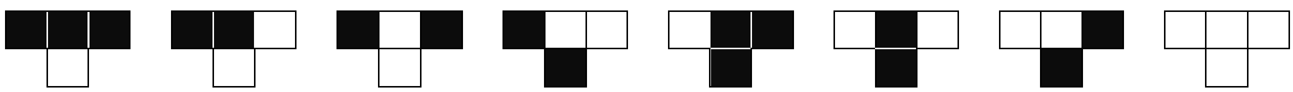
Anche il numero di "colori" (o **stati distinti**) che un automa cellulare può assumere deve essere specificato.
Ma non basta: bisogna pure specificare che cosa si intende con celle "vicine". La scelta più semplice è quella di "vicine immediate", cioè quelle adiacenti alla cella considerata.

Il più semplice automa cellulare è di questo tipo:
- la griglia è lineare,
- ha solo due colori: il bianco (codificato con 0) e il nero (codificato con 1),

le celle "vicine" sono le due immediatamente adiacenti.

Esempio
L'insieme di regole è il seguente:
- una cella nera tra due nere diventa bianca,
- una cella nera tra una nera e una bianca diventa bianca,
- una cella bianca tra due nere resta bianca,
- una cella bianca tra una nera e una bianca diventa nera,
- una cella nera tra una bianca e una nera resta nera,
- una cella nera tra due bianche resta nera,
- una cella bianca tra una bianca e una nera diventa nera,
- una cella bianca tra due bianche resta bianca.

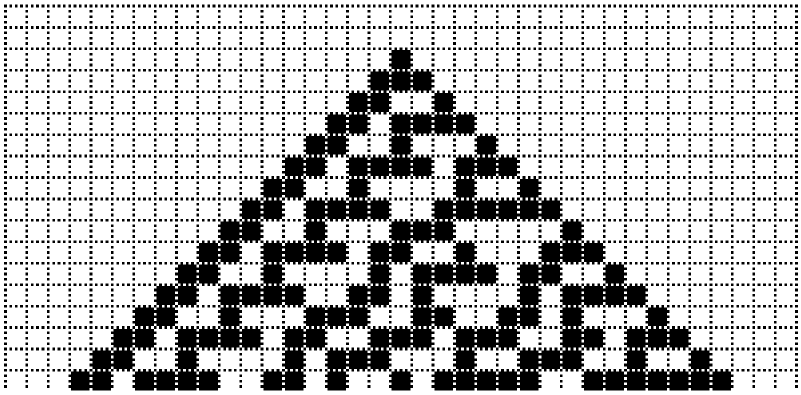
L'insieme può essere rappresentato nel seguente modo:



Codificato con bianco = 0 e nero = 1, esso assume questo aspetto:

111	110	101	100	011	010	001	000
0	0	0	1	1	1	1	0

L'immagine che segue mostra l'evoluzione prodotta nei primi 15 passi a partire da una singola cella nera (stato iniziale).



Domanda
Quanti sono gli insiemi di regole possibili?

Complemento
Gli automi cellulari sono stati studiati, nei primi anni '50 del XX secolo, come un possibile modello dei sistemi biologici.
Uno dei primi matematici che si sono interessati agli automi cellulari è stato John von Neumann.
Trovare a mano le evoluzioni degli automi è difficile, faticoso e lento.

1.10 Un particolare automa cellulare: il gioco "The Game of Life"

Il gioco The Game of Life o più semplicemente Life è un automa cellulare a due dimensioni, disposto su celle quadrate, con due stati: "vivo" (nero, codificato con 1) e "morto" (bianco, codificato con 0). Le vicine di una data cella sono le 8 celle che la circondano.

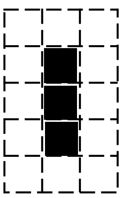
L'insieme di regole è il seguente:

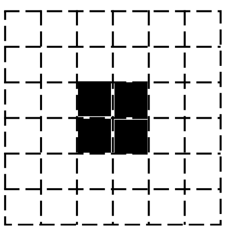
- se una cella è viva e
  se la somma degli stati delle vicine è 2 o 3 la cella rimane viva,
  se la somma degli stati delle vicine è diversa da 2 e da 3 la cella muore;
- se una cella è morta e
  se la somma degli stati delle vicine è 3 la cella diventa viva
  se la somma degli stati delle vicine è diversa da 3 la cella rimane morta.

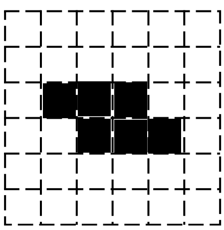
che può essere descritto anche con lo schema seguente:

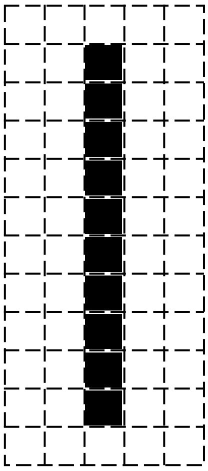
Somma	0	1	2	3	4	5	6	7	8
V	M	M	V	V	M	M	M	M	M
M	M	M	M	V	M	M	M	M	M

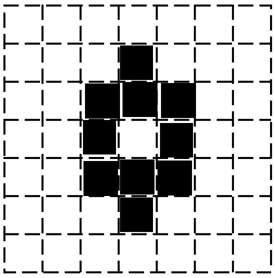
Questi sono alcuni stati iniziali interessanti:

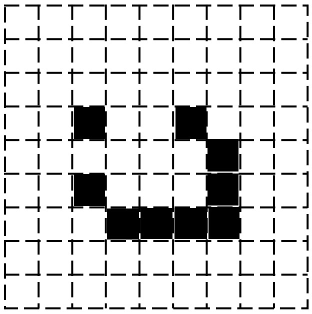












Trovare a mano le evoluzioni di Life è difficile, faticoso e lento: ad esempio, fra gli stati iniziali proposti sopra, uno evolve generando 6 "alianti" ed oscillando con periodo 2 dopo 1104 generazioni…
Disgraziatamente, preparare un foglio di calcolo, o un programma di computer, che giochi a Life è, a sua volta, un'operazione difficile e complicata.
Fortunatamente, si possono trovare in Internet siti che consentono di vedere le evoluzioni di Life lasciando la scelta dello stato iniziale e mostrando stati iniziali parecchio interessanti: per trovarli, nel motore di ricerca conviene mettere le due parole-chiave **life** e **game**[1].

Una possibile variante di Life potrebbe essere la seguente:

Somma	0	1	2	3	4	5	6	7	8
V	V	M	V	V	M	M	M	M	M
M	V	M	M	V	M	M	M	M	M

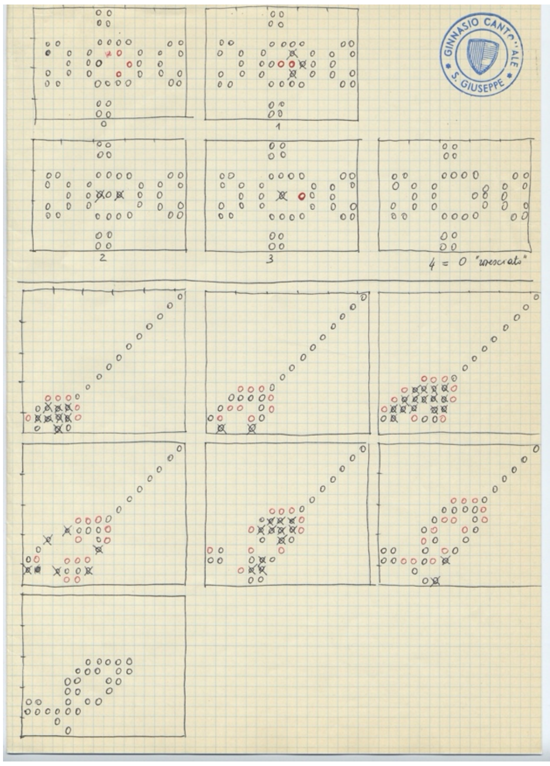
(Nelle celle grigie ci sono, in Life, due M)

Domanda: Compreso Life, quante sono le varianti possibili?
Il gioco è stato inventato da John Horton Conway (Liverpool, 26 dicembre 1937 – Princeton, 11 aprile 2020): ne parlò a Martin Gardner, che lo pubblicò sulla rivista "Scientific American" nell'ottobre del 1970. In italiano lo stesso articolo apparve sul numero del luglio 1971 di "Le Scienze".

Domanda: Conway si chiese se esiste uno stato iniziale che generi un numero infinito di celle: così a naso, rispondereste che esiste o che non esiste?
Se sì, esibirne almeno uno; se no, dimostrare che non esiste.

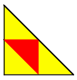
Esempi: di seguito, alcuni miei tentativi risalenti alla fine degli anni '70 nei mercoledì pomeriggio, momenti privilegiati per lavoretti extra.

[1] Io ho scaricato "LifeLab" dal sito
http://www.trevorrow.com/lifelab/
Impressionante ciò che può fare "Golly":
http://golly.sourceforge.net/

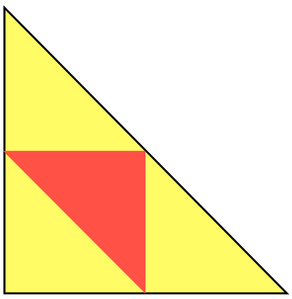


1.11 Mosaici e geometria

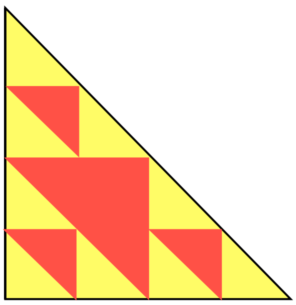
Questo problema si ispira al mosaico riprodotto sotto, che decora il pavimento della basilica di Santa Maria in Cosmedin a Roma, nel cui pronao è murata la famosa Bocca della Verità. Immaginate di dare a una macchina da disegno computerizzato questa sequenza di ordini:

1) modello = 
2) disegna un triangolo rettangolo isoscele di area 1 e coloralo di giallo,
3) se vedi un triangolo giallo, trova i punti medi dei suoi lati,
4) congiungi i punti medi e colora di rosso il triangolo trovato, come da modello,
5) torna a 3)

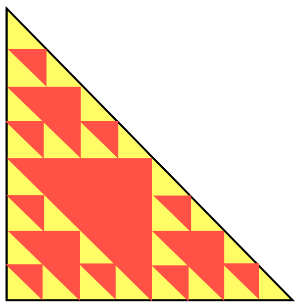
Ecco che cosa stamperebbe la macchina



dopo 1 ciclo



dopo 2 cicli



dopo 3 cicli

Domande

- Se esegue il ciclo 4 volte, quanti triangoli rossi avrà disegnato e quale sarà la loro area complessiva? Se esegue il ciclo 9 volte, quanti triangoli rossi avrà disegnato e quale sarà la loro area complessiva?
- Quando si fermerà la macchina?

Per i più esperti
- Se esegue il ciclo n volte, quanti triangoli rossi avrà disegnato e quale sarà la loro area complessiva?
- Se n tende a infinito, quanti triangoli rossi avrà disegnato e quale sarà la loro area complessiva?