

Monografie su problemi dell'insegnamento della matematica  
nella scuola media

## L'insegnamento della geometria

Resoconti delle conferenze di  
André Delessert e Francesco Speranza

A cura di Gianfranco Arrigo  
e Edoardo Montella

Maggio 1974  
74.07

Dipartimento della pubblica educazione  
UFFICIO STUDI E RICERCHE

Monografie su problemi dell'insegnamento della matematica  
nella scuola media

L'INSEGNAMENTO DELLA GEOMETRIA

Resoconti di conferenze tenute nel  
Canton Ticino

Conferenza del Prof. DELESSERT (Gianfranco Arrigo)  
1a conferenza del Prof. SPERANZA (Gianfranco Arrigo)  
2a conferenza del Prof. SPERANZA (Edoardo Montella)  
3a conferenza del Prof. SPERANZA (Edoardo Montella)

Maggio 1974

74.07

INDICE

- Premessa	pag. 4
- Note biografiche sui conferenzieri	
- prof. A. DELESSERT	pag. 5
- prof. F. SPERANZA	pag. 6
- <u>L'insegnamento della Geometria</u> Conferenza del prof. A. Delessert (a cura di G. Arrigo)	pag. 7
- <u>L'insegnamento della Matematica</u> Ia conferenza del prof. F. Speranza (a cura di G. Arrigo)	pag. 15
- <u>L'insegnamento della Geometria</u> IIa conferenza del prof. F. Speranza (a cura di E. Montella)	pag. 21
- <u>L'insegnamento della Geometria</u> IIIa conferenza del prof. F. Speranza (a cura di E. Montella)	pag. 36
- Bibliografia	pag. 68

PREMESSA

La presente monografia è costituita dai resoconti di quattro conferenze tenute durante gli ultimi due anni:

<u>7. 6.1972</u>	prof. André Delessert
<u>11.11.1972</u>	} prof. Francesco Speranza
<u>25.11.1972</u>	
<u>22. 3.1974</u>	

I risultati dei quattro incontri hanno suscitato vasta eco di interesse tra i docenti di matematica dei vari ordini di scuola; ragion per cui, vista anche la perfetta rispondenza di questi risultati alla problematica della scuola media, è stato ritenuto utile rielaborarli e riunirli in un unico testo.

Entrambi i conferenzieri sono degli esperti di Geometria; di conseguenza, a parte il primo incontro con il prof. Speranza (di carattere genericamente introduttivo all'insegnamento della matematica), è proprio sul problema dell'insegnamento della Geometria che verte essenzialmente il presente lavoro.

I quattro resoconti costituiscono una rielaborazione abbastanza libera e con numerosi contributi personali da parte dei curatori (il prof. Gianfranco Arrigo per le prime due conferenze, il prof. Edoardo Montella per le ultime due).

Inoltre, sono stati naturalmente ampliati molti dei temi principali, che durante le conferenze erano stati solo accennati, in maniera da rendere la monografia un documento di lavoro utilizzabile da tutti i docenti.

"L'INSEGNAMENTO DELLA GEOMETRIA"

Conferenza del prof. P. SPERANZA, Giubiasco 23.3.1974

1.1.1. INTRODUZIONE

Quando si dice "Geometria" si pensa, generalmente, a quella parte della matematica che si è studiata nella scuola media, e che è fatta soprattutto di triangoli. In altre parole, si pensa a quella che il matematico chiama "Geometria Euclidea", dal nome del suo sistematore a livello di teoria (teoria, tra l'altro, variamente contestata nel corso dei secoli).

L'etimologia stessa della parola, però, porta ad un'interpretazione restrittiva della materia. In greco, infatti, "Geometria" significa "Misura della terra" ed è quindi implicito che lo scopo di questa scienza è stato, ai suoi primordi, ben determinato, e non generale.

In altri termini, se si vuol intendere la geometria (come richiamato nella precedente conferenza) come "matematizzazione dello spazio fisico, sensibile" ci si deve mettere in una ottica più vasta, che permetta di abbracciare vari aspetti dello spazio fisico, e non solo quello particolare relativo alla misura (come nella Geometria Euclidea).

Vedremo quindi che, a seconda dell'aspetto preso in considerazione (cioè della situazione, del contesto di partenza) potremo sviluppare diversi tipi di geometria, tutti però saldamente collegati tra loro.

Dal punto di vista storico, possiamo notare che il primo matematico a dare una sistemazione organica ai concetti brevemente esposti sopra è stato FELIX KLEIN (1849-1925) che compendì i suoi risultati nell'ormai famoso "Programma di Erlangen" (1872) in cui caratterizzava ogni geometria mediante il "gruppo fondamentale" delle trasformazioni in essa ammesso.

## 1. VARI PUNTI DI VISTA

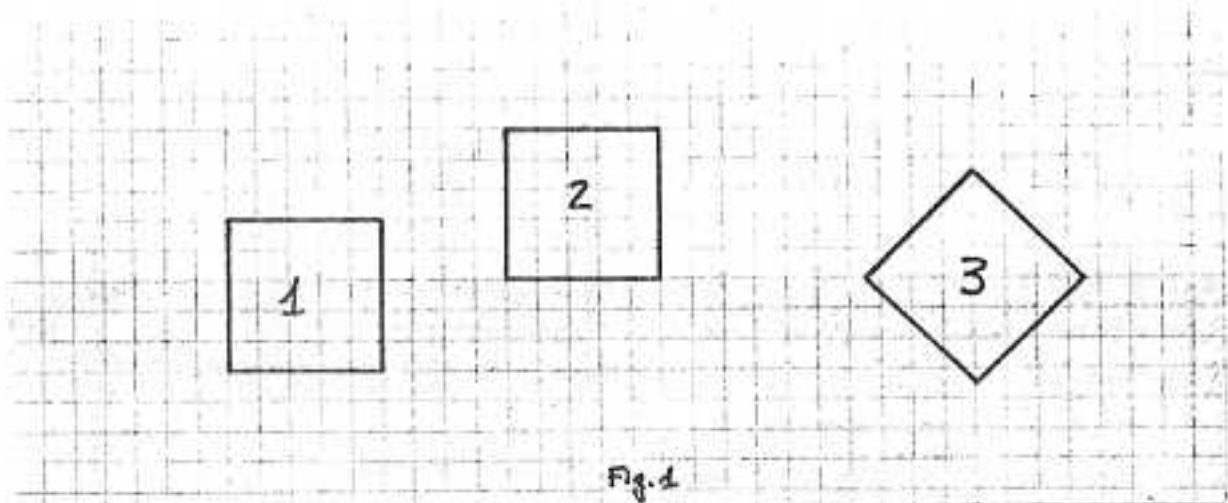
1.1 Possiamo iniziare il discorso proponendo un esperimento di tipo più che altro psicologico, ma molto significativo.

Tutti noi sappiamo che (soprattutto nell'ambito di un insegnamento di tipo lineare, rigido) i concetti degli allievi in tenera età (in maniera particolare quelli delle prime classi della scuola primaria) sono saldamente ancorati a rappresentazioni stereotipate.

Nel senso che, dovendo identificare dei concetti in situazioni diverse da quelle cui sono abituati, generalmente sbagliano.

Per esempio, una delle componenti che per un bambino è importante ai fini del riconoscimento di una figura geometrica, è la sua posizione nel piano, ossia sul foglio o sulla lavagna.

Disegniamo, per esempio, su un foglio quadrettato tre quadrati congruenti, così:



Se poniamo all'allievo la domanda:

"Quali di queste figure sono uguali?"

quasi sicuramente otterremo risposte di questo tenore:

"Le figure 1 e 2 sono due quadrati. La figura 3 non è un quadrato, è un rombo".

E in fondo l'allievo, dal suo punto di vista, ha anche lui ragione.

Infatti, come rilevato sopra, una delle componenti del suo giudizio sull'uguaglianza è la posizione delle figure rispetto a dei sistemi di riferimento (quadrettatura, lati del foglio, orizzontale e verticale sul piano della lavagna).

Per cui, essendo l'allievo abituato a veder disegnato un quadrato con i lati rispettivamente paralleli agli assi orizzontale e verticale, non riterrà più un quadrato la figura 3, che ha i lati inclinati diversamente rispetto agli assi.

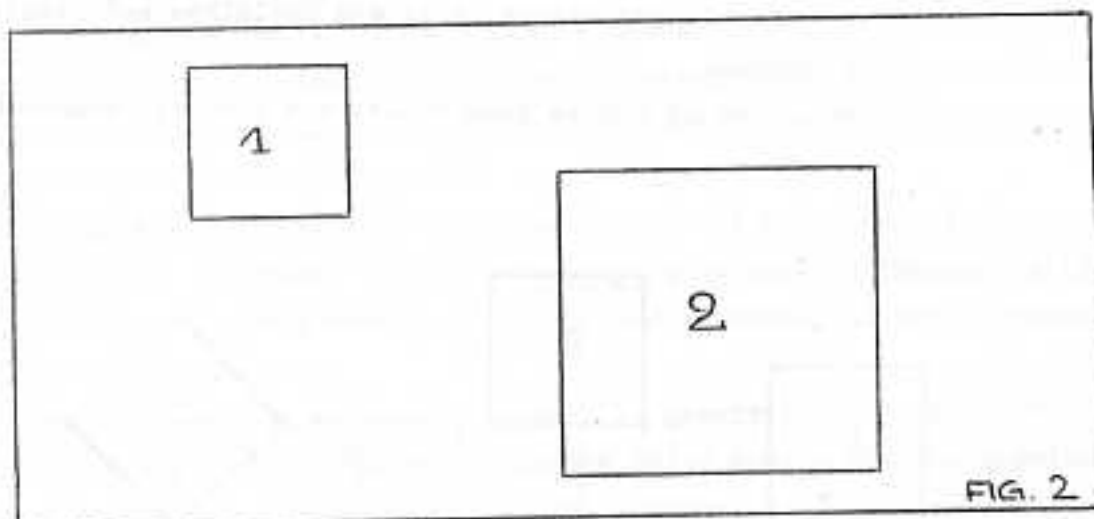
1.2 Poniamo nella stessa situazione di cui alla figura 1 uno studioso di geometria metrica.

Alla domanda "Quali di queste figure sono uguali?", egli senz'altro risponderà "Tutte e tre".

Infatti, per questo studioso, due figure piane sono uguali (o meglio, congruenti) quando la prima può essere portata a sovrapporsi esattamente sulla seconda con un movimento rigido.

Nella Fig. 1, infatti, il primo quadrato può essere sovrapposto al secondo con una traslazione, e al terzo con una rotazione.

1.3 Guardiamo ora la Fig. 2.



Poniamo quindi la domanda:

"Queste due figure sono uguali?" ad un topografo.

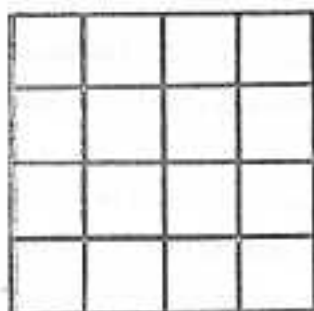
Probabilmente, egli risponderà "Sì".

Infatti, le due figure potrebbero essere, per esempio, l'una un campo, e l'altra la sua rappresentazione in scala su una mappa topografica. <sup>(1)</sup>

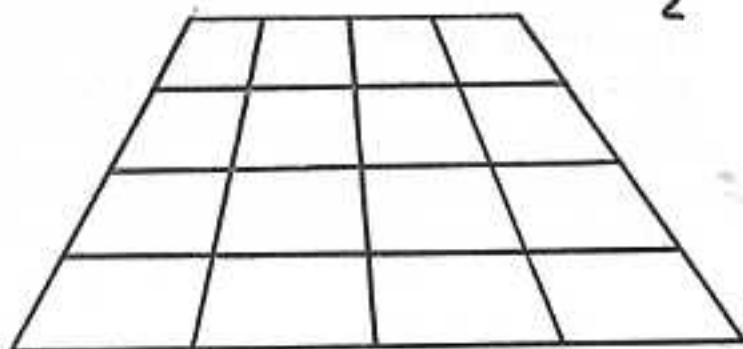
Di conseguenza, essendo i parametri di valutazione dell'uguaglianza, per il topografo, la somiglianza di forma e il rapporto dei lati, cioè la similitudine, evidentemente egli può dire il suo "Sì" con tutta tranquillità.

(1) o, se si vuol essere pignoli, una figura potrebbe essere la rappresentazione in scala 1:1 (cioè a grandezza naturale) di un campo e l'altra la sua rappresentazione in scala 1:n (con  $n \neq 1$ )

1.4 Poniamoci ora in un'altra situazione, esaminando la Fig. 3.



1



2

Fig. 3

Se noi ponessimo la domanda:

"Le due figure rappresentate nel disegno sono uguali?"

qualcuno potrebbe risponderci di sì?

A prima vista, si potrebbe pensare che tutti risponderrebbero in maniera negativa, alla domanda. Ma c'è, in effetti, chi risponderrebbe affermativamente. Per poter capire questo fatto, apparentemente inspiegabile, facciamo una supposizione:

sia la figura 1 una parte di un pavimento a piastrelle e sia la figura 2 la rappresentazione che ne dà in un quadro un pittore del quattrocento.

Sotto questa ipotesi, questo pittore potrebbe essere una di quelle persone che risponderrebbero con un "sì" alla domanda posta prima.

Infatti, nell'ottica di questa corrente pittorica, il trapezio è bene una rappresentazione prospettica di un quadrato.

Ad analoghi risultati potrebbe giungere un fotografo, fotografando un quadrato sotto una certa angolazione.

O, ancora, una qualunque persona potrebbe rispondere di sì alla domanda, pensando la figura 2 come ottenuta proiettando la 1 su uno schermo con una certa inclinazione, servendosi di una sorgente luminosa puntiforme.

1.5 Concludendo, abbiamo potuto notare che esistono tanti punti di vista sull'uguaglianza, (quelli presentati non sono ovviamente gli unici) ed ognuno di essi è valido relativamente ad una determinata situazione, e solo a quella. Per fare un esempio, consideriamo ancora una volta la Fig. 2. Abbiamo visto che un topografo senz'altro risponderebbe (sotto certe ipotesi) che i due quadrati in esso rappresentati sono uguali.

Ma poniamoci adesso in un'altra situazione: supponiamo che i due quadrati siano due terreni e che ci sia un uomo che, disponendo di una cifra  $x$ , possa comprarne uno. E' ragionevole pensare che l'uomo in questione comprerebbe indifferentemente il primo o il secondo, ritenendoli uguali? O, piuttosto, non comprerebbe quello contrassegnato con il numero 2?.....

## 2. UGUAGLIANZA O EQUIVALENZA ?

2.1 Ad un osservatore attento, non sarà sfuggito che, nelle pagine precedenti, abbiamo usato sempre la parola "uguaglianza", il che rappresenta, sia linguisticamente, sia matematicamente, un errore.

Si è trattato, ovviamente, di un errore voluto; questo per avere l'opportunità di far ben risaltare la relatività al contesto in cui ci si pone.

Infatti, l'uguaglianza nel vero senso della parola è quella assoluta, filosofica, nel significato cioè di "essere la stessa cosa".

Per cui, per esempio, vera uguaglianza è quella rappresentata nell'aritmetica o nella teoria degli insiemi con il simbolo =

Es.:

$$1 + 2 = 3 \quad 1 + 2 = 2 + 1$$

$$11001_2 = 100_5 = 121_4 = 25_{10}$$

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 10\} = B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 10\},$$

dove le diverse scritture collegate dal simbolo = rappresentano modi diversi di scrivere lo stesso numero o lo stesso insieme.

Il concetto di uguaglianza in senso filosofico andrebbe ovviamente approfondito,

ma non è certo questa l'occasione adatta per farlo.

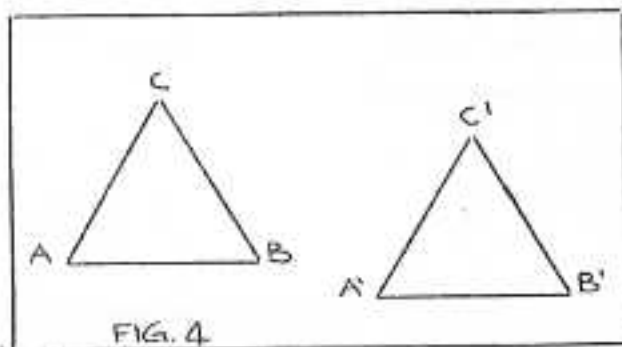
Nota: Esistono anche, ovviamente, delle altre maniere di vedere l'uguaglianza. Per esempio, una di esse è quella tipica dei calcolatori elettronici, che è un'uguaglianza non statica, ma dinamica, temporale. Infatti, esempio tipico ne sono scritture del tipo:

$$\boxed{I = I + 1}$$

Il cui significato si traduce in "Poni I uguale a I + 1"  
Formule di questo tipo sono usate nei cosiddetti "contatori": in pratica, una certa quantità (numerica) che fino ad una certa tappa del programma era uguale a I, nella tappa successiva diventa uguale a I+1.

2.2 Risulta evidente, da quanto detto, che le uguaglianze di cui si parlava nel capitolo precedente, non sono uguaglianze di tipo filosofico. Si tratta infatti di uguaglianze non assolute, ma relative. Facciamo un esempio esplicativo.

Immaginiamo di trovarci nell'ambito della geometria euclidea; allora, dati due triangoli ABC e A'B'C', (fig. 4),



possiamo fare affermazioni del tipo

$$\boxed{\triangle ABC = \triangle A'B'C'}$$

Il realtà il simbolo "=", in questo caso, non designa una uguaglianza, ma una equivalenza, perché i due triangoli  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  non sono lo stesso triangolo.

E il criterio di equivalenza è, in questo caso, dato dalla sovrapponibilità per movimenti rigidi.

Ovviamente, anche negli altri casi visti nel primo capitolo si tratta di equivalenze e non di uguaglianze.

2.3 A questo punto possiamo ricapitolare quanto abbiamo esaminato nei paragrafi 1.1/1.5

Esistono quindi diversi tipi di equivalenza, che possiamo chiamare:

- Equivalenza del bambino
- Equivalenza metrica (o euclidea)
- Equivalenza simile
- Equivalenza proiettiva.

E possiamo ricavare i seguenti criteri di equivalenza:

- Due figure sono equivalenti per il bambino se trasportando parallelamente a sè stessa la prima si ottiene la seconda.
- Due figure sono metricamente equivalenti se l'una si ottiene dall'altra con un movimento rigido.
- Due figure sono similmente equivalenti se l'una si ottiene dall'altra mediante una similitudine.
- Due figure sono proiettivamente equivalenti se l'una si ottiene dall'altra mediante una proiezione.

E ad ognuna di queste equivalenze possiamo associare una (un tipo di) geometria; così avremo la:

- Geometria del bambino
- Geometria metrica (o euclidea)
- Geometria simile
- Geometria proiettiva.

2.4 Ma queste equivalenze e queste geometrie, pur essendo diverse, sono strettamente collegate tra di loro.

Osserviamo, per esempio, la Fig. 5.

