

Matematica elettorale

di
Giorgio Mainini

Sistema elettorale

scelta politica di una determinata
comunità

relativa alla ripartizione dei seggi

di un consesso rappresentativo

Sistemi elettorali

1. proporzionale:

la comunità ritiene che il numero di seggi assegnati ad ogni partito nel consesso rappresentativo debba essere proporzionale alla “forza” del partito nell’insieme dei votanti.

Sistemi elettorali

2. maggioritario:

la comunità ritiene che al partito più forte nell’insieme dei votanti debba essere assegnato un numero di seggi maggiore di quello che la proporzionalità concederebbe.

Sistemi elettorali

3. **totalitario:**

la comunità ritiene che il partito più forte nell'insieme dei votanti debba ottenere la totalità dei seggi nel consesso.

Metodo elettorale

realizzazione pratica del **sistema** scelto

scelta dell'**algoritmo** di ripartizione

Sistema proporzionale

Da che cosa nasce il problema?

| P_k | V_k | S_k | poiché |
|-------|------------|---------|----------------------------------|
| P_1 | 200 | 1 | $\frac{200}{1400} = \frac{1}{7}$ |
| P_2 | 200 | 1 | $\frac{200}{1400} = \frac{1}{7}$ |
| P_3 | 600 | 3 | $\frac{600}{1400} = \frac{3}{7}$ |
| P_4 | 400 | 2 | $\frac{400}{1400} = \frac{2}{7}$ |
| | $V = 1400$ | $S = 7$ | |

| P_k | V_k | S_k | quindi |
|-------|------------|---------|------------------------------------|
| P_1 | 200 | S_1 | $\frac{200}{1500} = \frac{S_1}{7}$ |
| P_2 | 200 | S_2 | $\frac{200}{1500} = \frac{S_2}{7}$ |
| P_3 | 600 | S_3 | $\frac{600}{1500} = \frac{S_3}{7}$ |
| P_4 | 500 | S_4 | $\frac{500}{1500} = \frac{S_4}{7}$ |
| | $V = 1500$ | $S = 7$ | |

$$S_1 = \frac{7 \cdot 200}{1500} = \frac{14}{15} \longrightarrow \textcircled{1}$$

$$S_3 = \frac{7 \cdot 600}{1500} = \frac{42}{15} = 2 + \frac{12}{15} \longrightarrow \textcircled{3}$$

$$S_2 = \frac{7 \cdot 200}{1500} = \frac{14}{15} \longrightarrow \textcircled{1}$$

$$S_4 = \frac{7 \cdot 500}{1500} = \frac{35}{15} = 2 + \frac{5}{15} \longrightarrow \textcircled{2}$$

In teoria

il **metodo**

che **meglio** realizza il

sistema proporzionale

è il **metodo** dei

maggiori resti “puro”

Cioè, chiamando

- c_j il **contingente**, cioè il numero di seggi che teoricamente (cioè non tenendo conto del fatto che deve essere intero) spetterebbe al partito P_j ;
- S il numero totale dei seggi da attribuire;
- V_j il numero di voti ottenuti dal partito P_j ;
- V il numero totale dei voti ottenuti da tutti i partiti;
- S_j il numero totale di seggi per il partito P_j ;
- q il quoziente Hare (“quoziente semplice”), per definizione uguale a $\frac{V}{S}$

se si desidera che il numero di seggi da assegnare ad ogni partito sia esattamente proporzionale al numero dei voti ottenuti da quel partito, si ha:

$$\frac{c_j}{S} = \frac{V_j}{V} \quad \text{da cui:} \quad c_j = \frac{S \cdot V_j}{V} = \frac{S}{V} \cdot V_j = \frac{1}{q} \cdot V_j = \frac{V_j}{q}$$

Poiché, con il metodo dei maggiori resti, si ha

$$S_{j,1} = \text{INT}\left(\frac{V_j}{q}\right) = \text{INT}(c_j)$$

si vede che la differenza tra S_j e c_j è al massimo 1.

Difatti, o $S_j = S_{j,1}$ o $S_j = S_{j,1} + 1$, nel caso che il partito P_j abbia uno dei maggiori resti.

Problema

Supponiamo che per l'elezione al Gran Consiglio ($S=90$) competano 15 liste, e che, alla prima ripartizione, vengano assegnati 70 seggi.

Poiché rimangono da attribuire 20 seggi ma ci sono solo 15 frazioni, come assegnare gli ultimi 5 seggi?

Soluzione

Per definizione è

$$c_j = \frac{S \cdot V_j}{V} = n_j + f_j, \text{ da cui } S_{j,1} = n_j$$

poiché

$$\sum_{j=1}^k c_j = \sum_{j=1}^k \frac{S \cdot V_j}{V} = \frac{S}{V} \cdot \sum_{j=1}^k V_j = \frac{S}{V} \cdot V = S$$

è anche

$$\sum_{j=1}^k n_j + \sum_{j=1}^k f_j = \sum_{j=1}^k S_{j,1} + \sum_{j=1}^k f_j = S$$

<k cioè $\leq k-1$

>S-k cioè $\geq S-k+1$

Soluzione

Cioè, per generici S e k, si ha

$$\sum_{j=1}^k S_{j,1} \geq S - k + 1 = S - (k - 1)$$

Allora, al massimo, si devono attribuire ancora (k-1) seggi per maggior frazione.

Ma le frazioni sono una per partito, cioè k: ce ne sono dunque abbastanza per completare il consesso:

il problema è un falso problema!

La **Legge sull'esercizio dei diritti politici** cantonale, del 7 ottobre 1998, recita, al Capitolo III, Art.72:

- Per l'elezione del Gran Consiglio la ripartizione dei seggi fra i vari gruppi si effettua in base al quoziente elettorale dei voti ottenuti dai singoli gruppi diviso per novanta; se detta somma non è esattamente divisibile, si tiene conto della frazione sino alla **seconda cifra decimale**.
- (omissis)
- In caso di parità di frazione la precedenza spetta al gruppo che ha ottenuto il maggior numero di voti; se i gruppi a parità di frazione hanno pari voti, decide la sorte.
- (omissis)

La **Legge sull'esercizio del diritto di voto, sulle votazioni e sulle elezioni** (23 febbraio 1954) recitava:
Art. 135 (elezione del Consiglio di Stato)

I membri non assegnati per quoziente intero sono attribuiti ai gruppi che hanno ottenuto le maggiori frazioni, anche se non hanno raggiunto il quoziente, ritenuto che:

- a) il gruppo che non ha conseguito la maggioranza assoluta non può ottenere più di due eletti; se avesse raggiunto due quozienti interi più una delle frazioni maggiori, esso rimane escluso dal riparto frazionale ed a questo partecipano solo gli altri gruppi aventi le frazioni maggiori;

La Legge sull'esercizio del diritto di voto, sulle votazioni e sulle elezioni (23 febbraio 1954) recitava:
 Art. 135 (elezione del Consiglio di Stato)

b) il gruppo che ha conseguito la maggioranza assoluta non può avere meno di tre eletti; se avesse raggiunto due quozienti interi più una delle frazioni non maggiori, la frazione stessa viene considerata prevalente ed ottiene il primo dei seggi non assegnati per quoziente.

La Legge sull'esercizio del diritto di voto, sulle votazioni e sulle elezioni (23 febbraio 1954) recitava:
 Art. 135 (elezione del Consiglio di Stato)

Comma a)

| (>40) L | S | (...) C | f(L) | f(S) | f(C) | S1(L) | S1(S) | S1(C) |
|------------|----|------------|------|------|------|-------|-------|-------|
| 41 | 21 | 38 | 1 | 1 | 18 | 2 | 1 | 1 |

Comma b)

| (>50) L | S | (...) C | f(L) | f(S) | f(C) | S1(L) | S1(S) | S1(C) |
|------------|---|------------|------|------|------|-------|-------|-------|
| 51 | 7 | 42 | 11 | 7 | 2 | 2 | 0 | 2 |

Esempio (Municipio di Lugano, elezioni del 2000)

| | P_k | V_k | $V_k\%$ |
|---|--------|-------|---------|
| 1 | PLR | 26921 | 45.75 |
| 2 | UDC | 1906 | 3.24 |
| 3 | LU Pro | 400 | 0.68 |
| 4 | PS | 8268 | 14.05 |
| 5 | PPD | 9791 | 16.64 |
| 6 | Lega | 11562 | 19.65 |
| | V | 58848 | |

Esempio (Municipio di Lugano, elezioni del 2000)

Variante 1: metodo dei maggiori resti "puro"

| | P_k | V_k | S_{k1} | r_k | S_{k2} | S_k |
|---|--------|----------|----------|----------|----------|-------|
| 1 | PLR | 26921 | 2 | 3381.80 | | 2 |
| 2 | UDC | 1906 | 0 | 1906.00 | | 0 |
| 3 | LU Pro | 400 | 0 | 400.00 | | 0 |
| 4 | PS | 8268 | 0 | 8268.00 | 1 | 1 |
| 5 | PPD | 9791 | 0 | 9791.00 | 1 | 1 |
| 6 | Lega | 11562 | 0 | 11562.00 | 1 | 1 |
| | V | 58848 | | | | |
| | q | 11769.60 | | | | |

Esempio (Municipio di Lugano, elezioni del 2000)

**Variante 2: metodo dei maggiori resti
con barrage**

| | P_k | V_k | S_{k1} | r_k | S_{k2} | S_k |
|---|--------|----------|----------|---------|----------|-------|
| 1 | PLR | 26921 | 2 | 3381.80 | 3 | 5 |
| 2 | UDC | 1906 | 0 | - | | 0 |
| 3 | LU Pro | 400 | 0 | - | | 0 |
| 4 | PS | 8268 | 0 | - | | 0 |
| 5 | PPD | 9791 | 0 | - | | 0 |
| 6 | Lega | 11562 | 0 | - | | 0 |
| | V | 58848 | | | | |
| | q | 11769.60 | | | | |

Esempio (Municipio di Lugano, elezioni del 2000)

**Variante 3: metodo dei maggiori resti
con barrage e con congiunzioni**

| | P_k | V_k | S_{k1} | r_k | S_{k2} | S_k |
|---|----------|----------|----------|---------|----------|---------|
| 1 | PLR | 26921 | 2 | 3381.80 | | 2 |
| 2 | Lega+UDC | 13468 | 1 | 1698.40 | | 1 |
| 3 | LU Pro | 400 | 0 | - | | 0 |
| 4 | PS+PPD | 18059 | 1 | 6289.40 | 1 | 2 (1+1) |
| | V | 58848 | | | | |
| | q | 11769.60 | | | | |

Il Gran Consiglio ha votato, il 16 dicembre 2002, una modifica della Legge elettorale:

per l'elezione dei Municipi si passa

dal

metodo dei maggiori resti

- con barrage
- con possibilità di congiunzioni

al

metodo Hagenbach-Bischoff

- senza barrage e
- senza possibilità di congiunzioni.

Esempio (Municipio di Lugano, elezioni del 2000)

Variante 4: metodo Hagenbach-Bischoff
senza barrage e senza congiunzioni

| | P_k | V_k | S_{k1} | I div. | S_{k2} | II div. | S_{k3} | S_k |
|---|--------|---------|----------|---------|----------|---------|----------|-------|
| 1 | PLR | 26921 | 2 | 8973.66 | | 8973.66 | 1 | 3 |
| 2 | UDC | 1906 | 0 | 1906.00 | | 1906.00 | | 0 |
| 3 | LU Pro | 400 | 0 | 400.00 | | 400.00 | | 0 |
| 4 | PS | 8268 | 0 | 8268.00 | | 8268.00 | | 0 |
| 5 | PPD | 9791 | 0 | 9791.00 | 1 | 4895.50 | | 1 |
| 6 | Lega | 11562 | 1 | 5781.00 | | 5781.00 | | 1 |
| | V | 58848 | | | | | | |
| | q_r | 9808.00 | | | | | | |

Esempio (Municipio di Lugano, elezioni del 2000)

Municipio di Lugano, 2000

Confronto seggi di competenza vs. seggi H-B

Var.: 5

| | | | | | | | | | | | |
|--------|----------|------|-------|-------|---------|--|--|--|--|------------|---|
| PLR | 26921 | 1346 | 28267 | 25575 | 2692.00 | | | | | | |
| Lega | 11562 | 578 | 12140 | 10984 | 1156.00 | | | | | | |
| PPD | 9791 | 489 | 10280 | 9302 | 978.00 | | | | | | |
| PS | 8268 | 413 | 8681 | 7855 | 826.00 | | | | | | |
| UDC | 1906 | 95 | 2001 | 1811 | 190.00 | | | | | | |
| LU Pro | 400 | 20 | 420 | 380 | 40.00 | | | | | | |
| V | 58848 | | | | | | | | | # sorteggi | 3 |
| q | 11769.60 | | | | | | | | | | |

| PK | Vk | %Vk | Tot. S 1 | Tot. S 2 | Sk | %Sk | D% | |
|--------|---------|-------|----------|----------|----|-------|--------|---|
| PLR | 26059 | 44.54 | 2 | 3 | 3 | 60.00 | 15.46 | 9 |
| Lega | 11918 | 20.37 | 1 | 1 | 1 | 20.00 | -0.37 | 3 |
| PPD | 9866 | 16.86 | 1 | 1 | 1 | 20.00 | 3.14 | 3 |
| PS | 8428 | 14.41 | 0 | 0 | 0 | 0.00 | -14.41 | 0 |
| UDC | 1841 | 3.15 | 0 | 0 | 0 | 0.00 | -3.15 | 0 |
| LU Pro | 392 | 0.67 | 0 | 0 | 0 | 0.00 | -0.67 | 0 |
| V | 58504 | | | | | | | |
| q | 9750.67 | | 4 | 5 | 5 | | | |

Esempio (Municipio di Lugano, elezioni del 2000)

Risultato di 1000 simulazioni per ogni Var.%

| Var. % | 5 | | | | 7.5 | | | | 10 | | | | 12.5 | | | |
|---------|-------------------------|----------------|------|-----------------|-----------------|------|-----------------|-----------------|------|-----------------|-----------------|------|-----------------|-----------------|------|--|
| | S _k (MRp) | c _k | Δ% | ΣS _k | Σc _k | Δ% | ΣS _k | Σc _k | Δ% | ΣS _k | Σc _k | Δ% | ΣS _k | Σc _k | Δ% | |
| PL R | 2 | 2.29 | -13 | 2983 | 2289 | 30 | 2886 | 2286 | 26 | 2818 | 2282 | 23 | 2756 | 2281 | 21 | |
| Leg a | 1 | 0.98 | 2 | 1000 | 983 | 2 | 1001 | 982 | 2 | 1001 | 983 | 2 | 1000 | 982 | 2 | |
| PPD | 1 | 0.83 | 20 | 1000 | 830 | 20 | 1000 | 831 | 20 | 993 | 835 | 19 | 972 | 835 | 16 | |
| PS | 1 | 0.7 | 42 | 17 | 702 | -98 | 116 | 704 | -84 | 188 | 703 | -73 | 272 | 706 | -61 | |
| UDC | 0 | 0.16 | -100 | 0 | 162 | -100 | 0 | 162 | -100 | 0 | 162 | -100 | 0 | 162 | -100 | |
| LU P ro | 0 | 0.03 | -100 | 0 | 34 | -100 | 0 | 34 | -100 | 0 | 34 | -100 | 0 | 34 | -100 | |

| Var. % | 15 | | | 18 | | | 20 | | |
|---------|-----------------|-----------------|------|-----------------|-----------------|------|-----------------|-----------------|------|
| | ΣS _k | Σc _k | Δ% | ΣS _k | Σc _k | Δ% | ΣS _k | Σc _k | Δ% |
| PLR | 2739 | 2285 | 20 | 2732 | 2281 | 20 | 2704 | 2276 | 19 |
| Le ga | 1001 | 981 | 2 | 1000 | 987 | 1 | 998 | 991 | 1 |
| PPD | 950 | 832 | 14 | 915 | 832 | 10 | 880 | 833 | 6 |
| PS | 310 | 707 | -56 | 353 | 705 | -50 | 418 | 704 | -41 |
| UDC | 0 | 162 | -100 | 0 | 162 | -100 | 0 | 162 | -100 |
| LU P ro | 0 | 34 | -100 | 0 | 34 | -100 | 0 | 34 | -100 |

Ma anche il “miglior” **metodo**
(dei **maggiori resti “puro”**)

ha gravi difetti.

I più importanti sono tre famosi **paradossi**:

1. il **paradosso** demografico
2. il **paradosso** dell’Alabama
3. il **paradosso** del nuovo Stato

Paradosso demografico

Supponiamo che tre partiti abbiano ottenuto i voti e i seggi indicati nella tabella che segue ($S=21$):

| P_k | V_k | S_{k1} | r_k | S_{k2} | S_k |
|-------|--------|----------|-------|----------|-------|
| P_1 | 67000 | 13 | 2000 | | 13 |
| P_2 | 20000 | 4 | 0 | | 4 |
| P_3 | 18000 | 3 | 3000 | 1 | 4 |
| V | 105000 | | | | |
| q | 5000 | | | | |

Paradosso demografico

Supponiamo ora che P_1 perda 100 voti, P_2 ne guadagni 1300 e P_3 ne perda 1200.

| P_k | V_k | S_{k1} | r_k | S_{k2} | S_k |
|-------|--------|----------|-------|----------|-------|
| P_1 | 66900 | 13 | 1900 | 1 | 14 |
| P_2 | 21300 | 4 | 1300 | | 4 |
| P_3 | 16800 | 3 | 1800 | | 3 |
| V | 105000 | | | | |
| q | 5000 | | | | |

| P_k | V_k | S_{k1} | r_k | S_{k2} | S_k |
|-------|--------|----------|-------|----------|-------|
| P_1 | 67000 | 13 | 2000 | | 13 |
| P_2 | 20000 | 4 | 0 | | 4 |
| P_3 | 18000 | 3 | 3000 | 1 | 4 |
| V | 105000 | | | | |
| q | 5000 | | | | |

Cioè: P_1 , pur avendo perduto voti, guadagna un seggio.

Paradosso dell'Alabama

Supponiamo di avere la seguente tabella ($S=3$):

| P_k | V_k | S_{k1} | r_k | S_{k2} | S_k |
|-------|---------|----------|--------|----------|-------|
| P_1 | 140000 | | 140000 | 1 | 1 |
| P_2 | 400000 | 1 | 66667 | | 1 |
| P_3 | 460000 | 1 | 126667 | | 1 |
| V | 1000000 | | | | |
| q | 333333 | | | | |

I politici locali, però, non sono soddisfatti: la sproporzione è palese. Allora decidono di aumentare di 1 il numero dei seggi, portandolo a 4.

Paradosso dell'Alabama

Si ottiene la seguente tabella:

| P_k | V_k | S_{k1} | r_k | S_{k2} | S_k |
|-------|---------|----------|--------|----------|-------|
| P_1 | 140000 | | 140000 | | |
| P_2 | 400000 | 1 | 150000 | 1 | 2 |
| P_3 | 460000 | 1 | 210000 | 1 | 2 |
| V | 1000000 | | | | |
| q | 250000 | | | | |

| P_k | V_k | S_{k1} | r_k | S_{k2} | S_k |
|-------|---------|----------|--------|----------|-------|
| P_1 | 140000 | | 140000 | 1 | 1 |
| P_2 | 400000 | 1 | 66667 | | 1 |
| P_3 | 460000 | 1 | 126667 | | 1 |
| V | 1000000 | | | | |
| q | 333333 | | | | |

Cioè, pur rimanendo invariati i voti, ed essendoci inoltre a disposizione un seggio in più, P_1 perde un seggio.

Paradosso dell'Alabama

Sulla base di studi effettuati dall'Ufficio del censimento statunitense dopo il censimento del 1880, si scoprì che se i seggi al Congresso fossero stati 299, l'Alabama ne avrebbe ottenuti 8, ma che, se fossero stati 300, ne avrebbe ottenuti 7.

| Stato | c, se $S=299$ | maggior frazione | c, se $S=300$ | maggior frazione | Δc |
|----------|------------------|---------------------|------------------|---------------------|------------|
| Alabama | 7,646 | 0,646 | 7,671 | 0,671 | 0,025 |
| Texas | 9,640 | 0,640 | 9,672 | 0,672 | 0,032 |
| Illinois | 18,640 | 0,640 | 18,702 | 0,702 | 0,062 |

Paradosso del nuovo Stato

Nel 1907 l'Oklahoma entrò a far parte, come nuovo Stato, degli Stati Uniti.

All'epoca, il Congresso contava **386** deputati per una popolazione di 74562608 anime.

Al nuovo Stato, che contava circa 1000000 di abitanti, furono assegnati 5 nuovi seggi, portando dunque i membri del Congresso a **391**.

Paradosso del nuovo Stato

Ecco che cosa si venne a trovare:

| P_k | $S_k(386)$ | $S_k(391)$ |
|----------|------------|------------|
| Oklahoma | - | 5 |
| Maine | 3 | 4 |
| New York | 38 | 37 |
| Altri | 345 | 345 |
| S | 386 | 391 |

Cioè: la semplice entrata di un nuovo Stato, con aumento proporzionale del totale dei seggi, ha fatto perdere un seggio a New York e ne ha fatto guadagnare uno al Maine.

Conclusione

Di fronte a proposte di **sistema**

informarsi **dettagliatamente**

sul **metodo**

FINE

giorgio.mainini@ticino.com