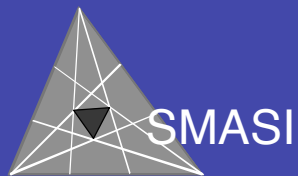
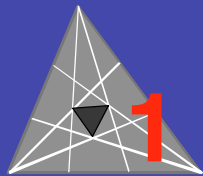


Insegnare matematica oggi



Gianfranco Arrigo



**Bisogna ancora insegnare
matematica?**

Perché?

un tunnel oscuro...

1993, un professore di elettrotecnica...

Da circa tre decenni, prima in Francia (sotto la spinta dei bourbakisti), poi in Belgio e infine nella Svizzera romanda, a matematica, si insegna ciò che di più astratto, di più verbale, di più inutile si possa trovare (...).

La chiamano «La Matematica» e toglie lo spazio necessario all'insegnamento di quei contenuti matematici che per molto tempo hanno dato prova di essere utili agli ingegneri, agli economisti, ai fisici, ecc. (...).

«La Matematica» è diventata uno strumento di selezione sociale e come tale ha preso il posto del latino, lingua inutile per la comunicazione.

**Morris H. Shamos, 1999, Il mito della
formazione scientifica
Accademia delle Scienze, New-York...**

La matematica imparata a scuola è determinante per la riuscita degli studi, ma in seguito non gioca più alcun ruolo...

Gli sforzi profusi per più di cento anni dalla scuola nell'intento di dare una formazione scientifica generale sono stati del tutto vani: il 90% degli Americani non ha alcuna idea della scienza...

Gli studenti dimenticano le conoscenze matematiche laboriosamente apprese a scuola, non appena terminato il periodo di scolarità...

**Didier Nordon, 2000, Si ha il diritto di non
gradire la matematica!
Tangente, Bordeaux...**

Molti liceali odiano la matematica (...)

Alcuni spiriti sono portati per la matematica, altri no: è così e la pedagogia non può farci nulla (...)

Dunque, decidere di insegnare la matematica a tutti, significa compiere una crudeltà nei confronti della maggioranza degli allievi (...)

Prima di farsi maledire, occorre riflettere: vale proprio la pena di imporre la matematica a tutti i liceali?

Proponiamola, sì, ma non imponiamola (...)

Bernard Charlot, 2001, Faire des mathématiques: le plaisir du sense

Fatto inconfutabile: la mortalità scolastica è legata all'origine sociale degli allievi...

L'essenziale perché le attuali strutture sociali sopravvivano è che la scuola selezioni in modo tale da sembrare dipendente dalle attitudini...

Un tempo la disciplina «segregatrice» era il latino; oggi è la matematica, ma la selezione è la stessa...

Latino e Matematica hanno in comune di essere insegnate in modo estremamente formalizzato, codificato, normato...

Non è la matematica che seleziona: è il modo col quale la si insegna...

usciamo dal tunnel ...



Costruire il senso in matematica

Nella loro varietà, i contenuti matematici sono legati da relazioni essenziali che ne determinano il senso...

Un calcolo isolato, in sé, non ha senso, ma lo acquista quando lo si vede nel contesto della risoluzione di un problema...

Una definizione, in sé, non ha senso, ma lo acquista quando la si vede agire, per esempio, in una dimostrazione...

Costruire il senso in matematica

Esempio

Scomponi in un prodotto il seguente binomio...

$$x^3 - x$$

Preso così, isolatamente, ha senso solo sul piano strettamente formale.

Per un allievo di scuola media (e anche delle superiori...)

non ha alcun senso: s'ha da fare e basta.

Costruire il senso in matematica

Facciamo agire lo stesso calcolo in una situazione problema:

Nell'espressione $x^3 - x$, se sostituisci a x un qualunque numero naturale, ottieni sempre multipli di 6 (provare per credere): perché? Funziona veramente sempre?

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1) = (x - 1)x(x + 1)$$

Cioè: $x^3 - x$ è il prodotto di **tre numeri consecutivi**.

Costruire il senso in matematica

1	2	3	4	5	6	7	8	9
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
	6	24	60	120	210	336	504	

Dunque:

- almeno uno dei tre fattori è divisibile per 2
- uno dei tre fattori è sicuramente divisibile per 3

Un numero divisibile per 2 e per 3 è divisibile per 6.

Costruire il senso in matematica

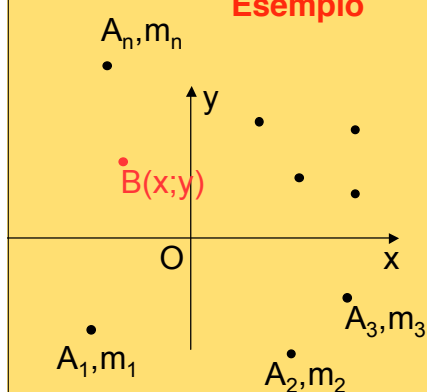
Per capire una dimostrazione non basta capire la sua struttura logica e verificare i singoli passaggi...

...occorre capire il contesto in cui si pone e le idee intuitive che stanno alla base del teorema.

A sua volta, il singolo teorema è molto meno importante della teoria alla quale appartiene.

Costruire il senso in matematica

Esempio



Definizione:
Baricentro di un sistema di n punti associati a n masse. È il punto B tale che:

$$m_1 \vec{BA}_1 + m_2 \vec{BA}_2 + \dots + m_n \vec{BA}_n = \vec{0}$$

Sia $A_i(a_{1i}; a_{2i})$

Costruire il senso in matematica

$$m_1 \vec{BA}_1 + m_2 \vec{BA}_2 + \dots + m_n \vec{BA}_n = \vec{0}$$

$$m_1 \begin{pmatrix} a_{11} - x \\ a_{21} - y \end{pmatrix} + \dots + m_n \begin{pmatrix} a_{1n} - x \\ a_{2n} - y \end{pmatrix} = \vec{0}$$

da cui:

$$\begin{cases} x = \frac{m_1 a_{11} + m_2 a_{12} + \dots + m_n a_{1n}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \\ y = \frac{m_1 a_{21} + m_2 a_{22} + \dots + m_n a_{2n}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \end{cases}$$

A che serve tutto questo formalismo?

Costruire il senso in matematica

Baricentro geometrico di un triangolo:

s'intende il modello geometrico del centro di gravità di una lastra omogenea triangolare.

Esso coincide col baricentro matematico di un sistema di 3 punti associati alla stessa massa m .

Se i vertici sono $P(x_1; y_1)$ $Q(x_2; y_2)$ $R(x_3; y_3)$, le coordinate del baricentro B sono:

$$\begin{cases} x = \frac{m x_1 + m x_2 + m x_3}{m + m + m} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ y = \frac{m y_1 + m y_2 + m y_3}{m + m + m} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \end{cases}$$

Costruire il senso in matematica

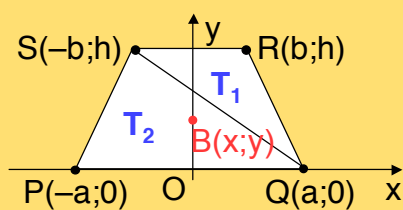
Baricentro geometrico di un poligono di n lati.

Purtroppo, per un numero di lati $n \geq 4$, esso **non** coincide più col baricentro matematico di un sistema di n punti associati alla stessa massa m .

E allora, che fare?

Costruire il senso in matematica

Esempio: baricentro geometrico di un trapezio isoscele



Baricentro B_1 di T_1 : $B_1\left(\frac{a}{3}; \frac{2h}{3}\right)$
Area(T_1) = $b h$

Baricentro B_2 di T_2 : $B_2\left(\frac{-b}{3}; \frac{h}{3}\right)$
Area(T_2) = $a h$

Il problema si riduce a trovare il baricentro del sistema $(B_1; a h), (B_2; b h)$

Perché si può immaginare che le masse (differenti!) dei due triangoli T_1 e T_2 si concentrino nei loro baricentri.

Costruire il senso in matematica

Coordinate di B:

$$\begin{cases} x = \frac{b h \left(\frac{a}{3}\right) + a h \left(\frac{-b}{3}\right)}{b h + a h} = 0 \\ y = \frac{b h \left(\frac{2h}{3}\right) + a h \left(\frac{h}{3}\right)}{b h + a h} = \frac{h(2b+a)}{3(b+a)} \end{cases}$$

$$B\left(0; \frac{h(2b+a)}{3(b+a)}\right)$$

Osserviamo subito che l'ascissa poteva anche non essere calcolata: per ragioni di simmetria, s'impone $x=0$.

Lo stesso non si può dire per l'ordinata (la quale appare ben diversa da $h/2$).

Costruire il senso in matematica

Ogni poligono (convesso) di n lati può essere scomposto in (almeno) $n-2$ triangoli, dunque il metodo appena inaugurato col trapezio isoscele può essere esteso al caso di un poligono qualunque.

La definizione iniziale di baricentro di un sistema di n punti ai quali sono associate m masse acquista così un senso concreto importante.

Ovviamente non è questa la sola applicazione della formula, ma per un allievo liceale può già essere sufficiente per superare la barriera del solo formalismo.

Costruire il senso in matematica

Infine, occorre rendersi conto che le varie teorie non sono mai autonome: funzionano le une nelle altre:

l'aritmetica nella geometria...

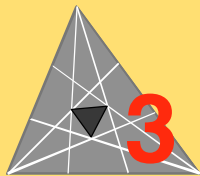
la geometria nell'algebra...

l'algebra nell'analisi...

l'analisi nella geometria...

la geometria nell'aritmetica...

e il girotondo continua, dando sempre più senso ai concetti matematici.



Pensare matematicamente

La matematica è un vasto e complesso insieme di conoscenze organizzate deduttivamente...

Imparare la matematica **non** significa assorbire questo complesso di conoscenze,

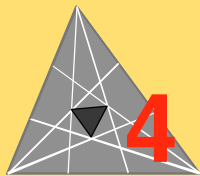
bensì intraprendere un'avventura intellettuale allo scopo di **perfezionare** la propria capacità di pensare matematicamente e quindi di risolvere problemi.

Pensare matematicamente

L'attività matematica è una sorta di contrappunto tra immaginazione (intuizione) e ragionamento logico.

Il prodotto matematico ha sempre una struttura logica di tipo deduttivo...

...ma l'attività che crea il prodotto è essenzialmente di tipo induttivo (basata su immagini mentali e alimentata dalla creatività del singolo).



Matematica e cultura

Anche se in molti ambienti della nostra società (purtroppo anche nella scuola)...

...si tende a distinguere tra **matematica** (vista come disciplina arida e chiusa)

e **cultura** (alla quale senza alcuna esitazione si associano anche certe creazioni dette «artistiche» o certe scienze... poco -o per nulla- scientifiche)...

... è assolutamente indiscutibile che la matematica è una **componente culturale essenziale** che ha segnato e indirizzato la storia del pensiero umano.

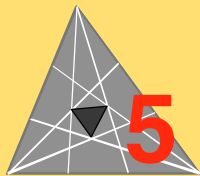
Matematica e cultura

Del resto le altre discipline tendono a matematizzarsi...

... non solo le **scienze sperimentali** (campo ovvio di applicazione della matematica),

ma anche le ... **scienze umane**, così chiamate attualmente proprio perché organizzate attorno a modelli matematici...

...e anche **espressioni artistiche** al di fuori di ogni sospetto (si vedano, ad esempio i vari Escher, Reuterswaerd, ma anche Dante, Shakespeare, Piero Della Francesca, Leonardo DaVinci, Mozart, Asimov e tantissimi altri).



Matematica e mondo industriale

La civiltà tecnologica risparmia all'uomo la maggior parte (almeno) dei lavori di routine.

La maggior parte delle attività umane poggia sia sul **pensiero razionale** sia sulle relazioni umane, artistiche, sportive,...

È difficile prevedere il futuro...

... ma sicuramente l'attuale tendenza -richiesta di capacità razionali piuttosto che di abilità ripetitive- si rafforzerà almeno in un futuro prossimo...

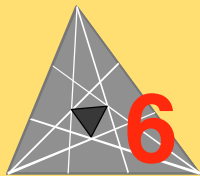
Matematica e mondo industriale

... e parallelamente sarà sempre più importante una buona formazione matematica...

... nella matematica «di oggi», nella quale non ha assolutamente senso distinguere tra «pura» e «applicata».

È comunque demenziale voler dipingere la teoria matematica con aggettivi del tipo «astratto, verbale, inutile».

Chi conosce la storia della matematica sa quante volte si sono dati giudizi di questo tipo a teorie matematiche rivelatesi poi essenziali in applicazioni tecnologiche...



Matematica e formazione civica

In un regime democratico nel quale (almeno nelle intenzioni) si riconosce la sovranità al popolo...

... diventa sempre più importante formare il futuro cittadino - quindi l'allievo della scuola obbligatoria- alla luce del pensiero razionale e di una cultura matematica di base.

Basta riflettere sulle numerose votazioni nelle quali si è chiamati ad esprimersi su questioni tecnologiche, tecnocratiche, economiche e via dicendo...

... senza contare la «matematica dei sistemi elettorali»...



Matematica e sviluppo della personalità

Siamo alla fine, ma, *dulcis in fundo*, mi si permetta di sottolineare l'importanza dei valori umani che l'attività matematica induce:

- l'umiltà e la curiosità di fronte alla sfida intellettuale
- l'abitudine a problematizzare la realtà
- la consapevolezza di dover faticare e dare prova di tenacia per raggiungere un risultato... e la gioia, la soddisfazione, il piacere di essere riusciti a compiere un passo significativo...

Matematica e sviluppo della personalità

- l'abitudine e la capacità di interagire con i propri compagni, ad esprimere correttamente le proprie idee, a tollerare e a esaminare razionalmente le idee diverse...
- la capacità di osservare la realtà anche attraverso la lente del pensiero matematico,
- la conquista di un mondo culturale -della conoscenza matematica e della sua storia- alternativo e complementare a quello raccontato dalle maggiori agenzie informative...

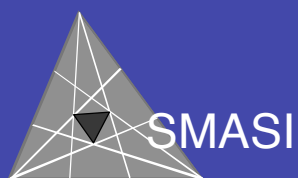
Matematica e sviluppo della personalità

un mondo nel quale la parola

libertà

ha ancora senso.

Fine



Gianfranco Arrigo